Ableitungen von Exponentialfunktionen

Info

Die meiste Zeit in der E-Phase haben wir uns mit dem Thema Ableitungen befasst. In der aktuellen Einheit zum Thema Exponentialfunktionen sind diese noch nicht vorgekommen. Nun ist es soweit!

Aufgabe 1

Auf der rechten Seite findest du ein Geogebra-Applet, das die Funktion $f(x)=2^x$ zeigt. Außerdem wird ein Punkt angezeigt, den du mit dem Schieberegler n verschieben kannst.

a) Verschiebe den Punkt mit dem Schieberegler und überlege dir, wie groß die Steigung der Funktion f in diesem Punkt ungefähr sein müsste. Schreibe deine Vermutung auf und begründe sie.

b) Überprüfe deine Vermutung, indem du das Häkchen für "Steigung" setzt und wieder mit dem Schieberegler den Punkt verschiebst.

c) Du hast nun einige Werte für die Steigung in verschiedenen Punkte bekommen. Überlege dir, wie die Ableitungsfunktion aussehen könnte (noch keine Funktionsgleichung, nur deren Verlauf!). Schreibe deine Vermutung auf und begründe sie.

d) Überprüfe deine Vermutung, indem du das Häkchen für "Spur" setzt und wieder mit dem Schieberegler den Punkt verschiebst.

e) Nun gilt es nur noch herauszufinden, welche Funktionsgleichung dahinter steckt. Hast du eine Idee? Schreibe deine Vermutung auf und begründe sie.

f) Überprüfe deine Vermutung, indem du das Häkchen für "Ableitung" setzt.

Geogebra

Die Ableitung der Exponentialfunktion $f(x)=2^x$ ist die Exponentialfunktion selbst mit einem (noch nicht genau bestimmbaren) Vorfaktor:

$$f(x)=2^x \implies f'(x)=0,69\cdot2^x$$

Beispiel 1: Rechnerische Bestimmung der Ableitung von $\bf f(x)=2^x$

Natürlich kommen wir nicht ganz drum herum, die Ableitungsfunktion auch rechnerisch zu bestimmen. Hierzu nehmen wir uns wie schon von den Polynomen bekannten Differentialquotienten zur Hilfe.

Um nun die Ableitung von $f(x)=2^x$ bestimmen zu können, müssen wir zunächst den Differentialquotienten aufstellen und dann den Grenzwert bestimmen:

Erinnerung: Differentialquotient

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

$$\begin{array}{rclcl} f'(x) &=&\lim_{h\to 0}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}&|&\text{Einsetzen von f(x)}\\ &=&\lim_{h\to 0}{\frac{2^{(x+h)}-2^x}{h}}&|&\text{Potenzgesetz }a^{(b+c)}=a^b\cdot a^c\\ &=&\lim_{h\to 0}{\frac{2^x\cdot2^h-2^x}{h}}&|&\text{Ausklammern von }2^x\text{ im Zähler}\\ &=&\lim_{h\to 0}{\frac{\left(2^h-1\right)\cdot2^x}{h}}&|&\text{Bruchgesetz}\\ &=&\lim_{h\to 0}{\left(\frac{2^h-1}{h}\cdot2^x\right)}&|&\text{Grenzwertgesetz}\\ &=&\left(\lim_{h\to 0}{\frac{2^h-1}{h}}\right)\cdot2^x\\ \end{array}$$

An dieser Stelle kommen wir mit algebraischen Berechnungen nicht mehr weiter, der Grenzwert $\lim_{h\to 0}{\frac{2^h-1}{h}}$ ist für uns so nicht näher bestimmbar. Allerdings hatten wir ganz am Anfang von der Grenzwertberechnung noch ein kleines Hilfsmittel: **Grenzwertbestimmung mit Testeinsetzung**!

h	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	...	**$h\to 0$**
$\bf \frac{2^h-1}{h}$	$0,718$	$0,696$	$0,6934$	$0,6932$	...	**$\lim_{h\to 0}{\frac{2^h-1}{h}}\approx 0,6932$**

Mit diesem Zwischenschritt können wir die Rechnung von oben fortführen:

$$\begin{array}{rclcl} f'(x) &=& ...\\ &=&\left(\lim_{h\to 0}{\frac{2^h-1}{h}}\right)\cdot2^x\\ &\approx&0,6932\cdot 2^x \end{array}$$

Also ergibt sich für die Funktion $f(x)=2^x$ die Ableitung $f'(x)=0,693\cdot2^x$ und unsere Vermutungen von oben sind (zumindest für 2^x) bestätigt.

Aufgabe 2

Auf der rechten Seite findest du wieder ein Geogebra-Applet. Dieses zeigt die Funktion $f(x)=a^x$ an, den Parameter a kannst du mit einem Schieberegler verändern. Außerdem wird die Ableitungsfuntkion $f'(x)$ angezeigt.

a) Verändere den Schieberegler und überprüfe die Behauptung aus dem Merksatz.

b) Was passiert, wenn du den Schieberegler auf $a=2,7$ einstellst? Schreibe deine Beobachtungen auf und notiere eine Vermutung, was passiert.

Geogebra

Beispiel 2 Die natürliche Exponentialfunktion

Aufgabe 2b lässt vermuten, dass es eine Exponentialfunktion gibt, deren Ableitung die gleiche Exponentialfunktion ist (Die Ursprungsfunktion und die Ableitungsfunktion liegen genau aufeinander).

Mit der Rechnung aus Beispiel 1 lässt sich folgender Zusammenhang zeigen:

$$\begin{array}{rclcl} (2^x)'&=&\left(\lim_{h \to 0}{\frac{2^h-1}{h}}\right)\cdot 2^x&\approx& 0,693\cdot 2^x\\ (2,7^x)'&=&\left(\lim_{h \to 0}{\frac{2,7^h-1}{h}}\right)\cdot 2,7^x&\approx& 0,99\cdot 2,7^x\\ (3^x)'&=&\left(\lim_{h \to 0}{\frac{3^h-1}{h}}\right)\cdot 3^x&\approx& 1,099\cdot 3^x\\ \end{array}$$

Die gesuchte Exponentialfunktion $f(x)=e^x$ liegt also mit ihrer Basis e irgendwo zwischen $2,7$ und 3

Es gibt eine Exponentialfunktion $f(x)=e^x$, deren Ableitung $f'(x)=1\cdot e^x=e^x$ ist.

Diese Exponentialfunktion nennt man **natürliche Exponentialfunktion** und die Basis e nennt man **Eulersche Zahl $\bf e$**.

Die Zahl e ist definiert durch $\lim_{h\to 0}{\frac{e^h-1}{h}=1}$, der Wert der Eulerschen Zahl beträgt ca. $e\approx2,718...$

Den zur eulerschen Zahl zugehörigen Logarithmus $\log_e(x) = \log_{2,718...}(x)$ nennt man auch den **natürlichen Logarithmus** und man bezeichnet ihn mit $ln(x)$ (logarithmus naturalis).

Aufgabe 3

a) Gegeben sei die Funktion $f(x)=e^x$. Berechne, für welches x die Funktion den Wert $f(x)=2$ annimmt.

b) Bearbeite im Buch S. 223 das Beispiel, verwende GeoGebra um die Graphen zu zeichnen. Bearbeite anschließend Aufgabe 5 auf S. 223.