Das Binärsystem - An/Aus

Zahlensysteme

Im Alltag rechnen wir fast ausschließlich im Dezimalsystem (10er-System). Das liegt daran, dass wir 10 Finger haben. Allerdings begegnen uns immer wieder auch andere Zahlensysteme. Unsere Uhrzeiten werden im 60er-System ausgedrückt (1h = 60min, 1min = 60sek). Ab und zu begegnet uns auch das 12er-System (1 Dutzend).

In der Informatik ist das 10er-System fast drittrangig, viel wichtiger sind das Binär- (2er-) und das Hexadezimalsystem (16er-). Auch das Oktalsystem (8er-) spielt hier eine Rolle.

Das Hexadezimalsystem kennt ihr z.B. von den HTML-Farbcodes (z.B. #FF1234 für dunkles Rot), das Oktalsystem von Linux-Dateisystemberechtigungen (z.B. 755 für `rwx r-x r-x`). Intern wird jede digitale Information im Dualsystem codiert, da Computer nur zwei Zustände kennen - an 1 und aus `0`.

Das Dezimalsystem - Basis $\mathbb{B}=10$

Das Dezimalsystem kennt ihr bereits seit der Grundschule. Mit ihm habt ihr rechnen gelernt. Wir wiederholen trotzdem die wichtigsten Konzepte, da diese auch in den anderen Zahlensystemen Anwendung finden. Das Dezimalsystem besteht aus den 10 verschiedenen **Ziffern** $\mathbb{Z}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ und ist ebenso wie die anderen Zahlensysteme ein sogenanntes **Stellenwertsystem**. Das bedeutet, dass der Wert einer Ziffer von der Position in der Zahl abhängig ist. Da wir 10 verschiedene Ziffern haben, sagen wir außerdem, dass die **Basis** des Dezimalsystems $\mathbb{B}=10$ ist.

Beispiele: 1234567890, 999, 543354.

Das Binär- oder Dualsystem - Basis $\mathbb{B}=2$

In der Informatik spielt das Binärsystem die wichtigste Rolle. Jede Information, die auf Computern gespeichert, verarbeitet, versendet oder empfangen wird, ist im Binärsystem codiert. Das liegt daran, dass Computer nur die beiden Zustände 1 und 0 kennen. Meist wird das durch Vorhandensein (1) oder Abwesenheit (0) von elektrischer Spannung dargestellt. Bei Glasfaserkabeln analog dazu durch Licht an (1) oder Licht aus (0).

Im Binärsystem haben wir also nur die beiden Ziffern $\mathbb{Z}=\{0,1\}$ und die Basis $\mathbb{B}=2$. Da wir die Zahl als Binärzahl hervorheben wollen, stellen wir die Basis $\mathbb{B}=2$ als Index nach.

Beispiele: 1101101_2, 1011111_2, 1100111000_2.

Umrechnung vom Binärsystem ins Dezimalsystem und umgekehrt

Der Algorithmus im Dezimalsystem

Betrachten wir z.B. die Zahl 128_{10}. Aus der Grundschule wissen wir, dass sie aus 1 Hunderter, 2 Zehnern und 8 Einern zusammengesetzt ist. Das verdeutlicht auch diese Tabelle:

	Hunderter	**Zehner**	**Einer**
Position der Ziffer innerhalb der Zahl	2. Stelle	1. Stelle	0. Stelle
Wert der Ziffer	$10^2=100$	$10^1=10$	$10^0=1$
Ziffer	1	2	8

In der dritten Zeile der Tabelle begegnen uns die Potenzen 10^2, 10^1 und 10^0, was den Hundertern, Zehnern und Einern entspricht. Die Exponenten dieser Potenzen entsprechen außerdem der Position der Ziffer innerhalb der Zahl.

***Beachte**, dass man in Stellenwertsystemen der hintersten Ziffer die niedrigste Stelle zuweist, der vordersten die höchste. Außerdem fängt man bei 0 an zu zählen!*

Somit ergibt sich die folgende (beim Dezimalsystem zugegebenermaßen noch recht unnütze) Rechnung:

$$\begin{array}{lclclcl} 128_{10} &=& 1\cdot 10^2 &+& 2\cdot 10^1 &+& 8\cdot 10^0\\ &=& 1\cdot 100 &+& 2\cdot 10 &+& 8\cdot 1\\ &=& 100 &+& 20 &+& 8\\ &=& 128_{10} \end{array}$$

Dieses Schema wird uns auch in den anderen Zahlensystemen sehr nützlich sein!

Binärsystem ins Dezimalsystem

Betrachten wir z.B. die Zahl 1101_2. Analog zum Dezimalsystem können wir die folgende Tabelle aufstellen:

Position der Ziffer innerhalb der Zahl	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle	0. Stelle
Wert der Ziffer	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$
Ziffer	1	1	0	1

Wenn wir die Binärzahl 1101_2 nun in das Dezimalsystem umrechnen wollen, so ergibt sich die folgende Rechnung:

$$\begin{array}{lclclclcl} 1101_2 &=& 1\cdot2^3 &+& 1\cdot2^2 &+& 0\cdot2^1 &+& 1\cdot2^0\\ &=& 1\cdot8 &+& 1\cdot4 &+& 0\cdot2 &+& 1\cdot1\\ &=& 8 &+& 4 &+& 0 &+& 1\\ &=& 13_{10} \end{array}$$

Das bedeutet, dass die Binärzahl 1101_2 umgerechnet ins Dezimalsystem der Dezimalzahl 13_{10} entspricht!

Aufgabe 1

Konvertiere die folgenden Binärzahlen ins Dezimalsystem:

a) 1011_2
b) 1001_2
c) $10~1101_2$
d) $1010~0100~1011~1101_2$

Lösung zu Aufgabe 1

a) $1011_2=11_{10}$
b) $1001_2=9_{10}$
c) $10~1101_2=45_{10}$
d) $1010~0100~1011~1101_2=42~173_{10}$

Dezimalsystem ins Binärsystem

Etwas rechenaufwändiger wird es, wenn wir Zahlen vom Dezimalsystem ins Binärsystem umrechnen wollen. Hierzu verwenden wir das folgende Schema. Betrachten wir z.B. die Zahl 317_{10}. Diese teilen wir so lange durch 2, bis wir bei 0 ankommen. Wir notieren uns in jedem Schritt die Reste.

$$\begin{array}{cccccc} 317 &:& 2 &=& 158 &R& 1\\ 158 &:& 2 &=& 79 &R& 0\\ 79 &:& 2 &=& 39 &R& 1\\ 39 &:& 2 &=& 19 &R& 1\\ 19 &:& 2 &=& 9 &R& 1\\ 9 &:& 2 &=& 4 &R& 1\\ 4 &:& 2 &=& 2 &R& 0\\ 2 &:& 2 &=& 1 &R& 0\\ 1 &:& 2 &=& 0 &R& 1\\ \end{array}$$

Die "Reste" ergeben - von unten nach oben gelesen - die gesuchte Binärzahl:

$$317_{10} = 100111101_2$$

Aufgabe 4

Wandle die folgenden Zahlen ins Binärsystem um:

a) 71_{10}
b) 542_{10}
c) 792_{10}
d) 1312_{10}

Lösung zu Aufgabe 4

a) $71_{10}=100~0111_2$

b) $542_{10}=10~0001~1110_2$
c) $792_{10}=11~0001~1000_2$
d) $1312_{10}=101~0010~0000_2$