**Aufgabe 1: Differentiation, Integration, Flächeninhalt**

a) Es seien $F_1$, $F_2$ und $f$ Funktionen, deren Graphen in der *Abb. 1* dargestellt sind. Entscheide, welche der beiden Funktionen $F_1$ oder $F_2$ eine Stammfunktion von $f$ ist und begründe deine Entscheidung mathematisch.

b) Vervollständige in Bezug auf *Abb. 2* die Lücken korrekt:

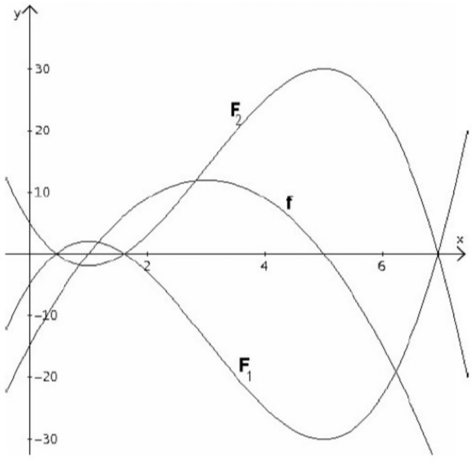



Abb. 1

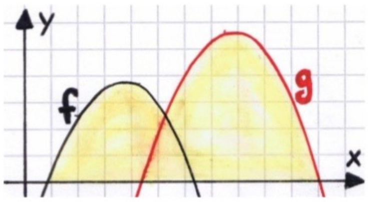



Abb. 2

Um die gelb markierte Fläche in *Abb. 2* korrekt zu berechnen, muss man zunächst ______________________________________________
______________________________________________
______________________________________________.

Dann ______________________________________________
______________________________________________
______________________________________________.

Zum Schluss ______________________________________________
______________________________________________
______________________________________________
______________________________________________.

a) I f hat bei ca. $x=1$ und $x=5$ Nullstellen, also muss F an diesen Stellen Hoch/Tiefpunkte haben.

II f hat bei ca. $x=3$ einen Hochpunkt, also muss F an dieser Stelle einen Wendepunkt haben.

III f verläuft zwischen ca. $x=1$ und $x=5$ oberhalb der x-Achse, also muss F in diesem Bereich eine positive Steigung haben.

I und II treffen auf $F_1$ und $F_2$ zu, III jedoch nur auf $F_2$.

Also ist $F_2$ die gesuchte Stammfunktion zu f.

b) ① Berechne den Schnittpunkt $x_0$ zwischen $f(x)$ und $g(x)$

Berechne die linke Nullstelle a von $f(x)$ und die rechte Nullstelle b von $g(x)$

② Berechne $\int_a^{x_0} f(x)\,dx$ und $\int_{x_0}^{b} g(x)\,dx$

③ Addiere die beiden Flächeninhalte

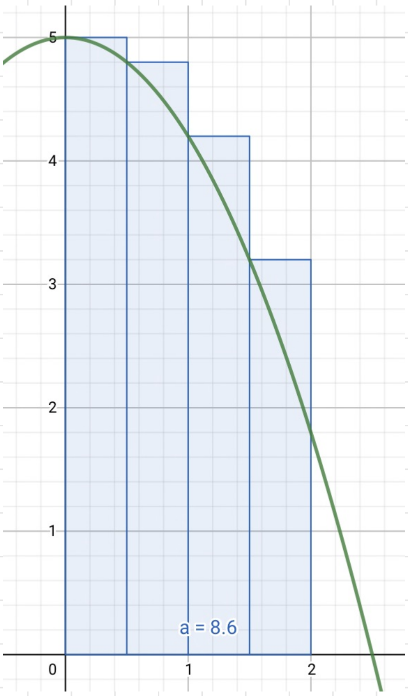
**Aufgabe 2: Eine Fläche – viele Streifen: Die Streifenmethode des Archimedes**

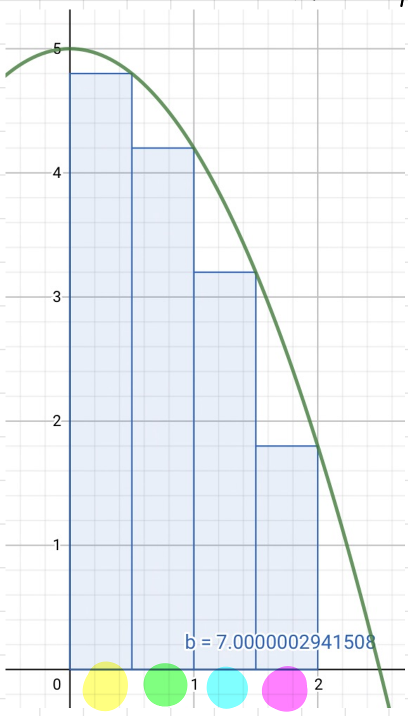
Es soll der Flächeninhalt unter der Funktion $f(x)=-0{,}8x^2+5$ im Intervall $[0;2]$ mit Hilfe der Untersumme $U_4$ und Obersumme $O_4$ bestimmt werden ( $x$ und $f(x)$ in $m$ ).

a) Zeichne die Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Verdeutliche anschließend zeichnerisch die Ober- und Untersumme, indem du die entsprechenden Streifen einzeichnest.

b) <u>Bestimme</u> den Flächeninhalt unter der Funktion $f(x)$ im Intervall $[0;2]$ mit Hilfe der Berechnung der Untersumme $U_4$ <u>rechnerisch</u>.

a) Obersumme $O_4$ Untersumme $U_4$




b)

$$U_4 = \frac{1}{2}\cdot\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)\right]$$

Breite der Streifen Höhe der jeweiligen Streifen

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\left(-0{,}8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\right)+\left(-0{,}8\cdot 1^2+5\right)+\left(-0{,}8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+5\right)+\left(-0{,}8\cdot 2^2+5\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{24}{5}+\frac{21}{5}+\frac{16}{5}+\frac{9}{5}\right]$$

$$= 7$$

**Aufgabe 3: Unbestimmtes und bestimmtes Integral und Stammfunktion**

Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale; vereinfache den Term wenn möglich:

a) $\int (5x^2+x)\,dx$ b) $\int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{4}x^3-2x+1\right)dx$ c) $\int\left(\frac{3}{2x^4}-7\sqrt{x^5}\right)dx$ d) $\int (3{,}2x^2+2n-5)\,dn$

e) Ermittle rechnerisch die Stammfunktion von $f(x)=4x^2-8x-6$, die durch den Punkt $P(3|2)$ verläuft.

Regeln, HDI, Rekonstrukt.

a) $\int 5x^2+x\,dx = \int 5x^2dx + \int x\,dx$ Summenregel

$= 5\int x^2dx + \frac{1}{2}x^2$ Faktorregel, Potenzregel

$= 5\cdot\left(\frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2$ Potenzregel

$= \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

b) $\int_{-2}^{4} \frac{1}{4}x^3 - 2x + 1\,dx = \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x^4 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + 1\cdot x\right]_{-2}^{4}$

$= \left[\frac{1}{16}x^4 - x^2 + x\right]_{-2}^{4}$

$= \left(\frac{1}{16}\cdot 4^4 - 4^2 + 4\right) - \left(\frac{1}{16}\cdot(-2)^4 - (-2)^2 + (-2)\right)$

$= 4 - (-5) = 9$

c) $\int \frac{3}{2x^4} - 7\sqrt{x^5}\,dx = \int \frac{3}{2}\cdot x^{-4}\,dx - \int 7\cdot x^{5/2}\,dx$ Summenregel, Faktorregel

$= \frac{3}{2}\cdot\int x^{-4}\,dx - 7\cdot\int x^{5/2}\,dx$ Potenzregel

$= \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot x^{-3}\right) - 7\cdot\left(\frac{2}{7}x^{7/2}\right)$

$= -\frac{1}{2}\cdot x^{-3} - 2x^{7/2} = -\frac{1}{2x^3} - 2\sqrt{x^7} + C$

d) $\int 3{,}2x^2 + 2n - 5\,dn = \int 3{,}2x^2\,dn + \int 2n\,dn - \int 5\,dn$ Summenregel

$= 3{,}2x^2\cdot n + 2\cdot\frac{1}{2}n^2 - 5\cdot n$ Faktor + Potenzr.

$= 3{,}2x^2\cdot n + n^2 - 5n + C$

Diese Terme enthalten die Integrationsvariable $n$ nicht und sind deshalb als Konstanten zu betrachten!

e) $F(x) = \int 4x^2 - 8x - 6\,dx = \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{2}x^2 - 6x + C$ unbestimmtes Int.

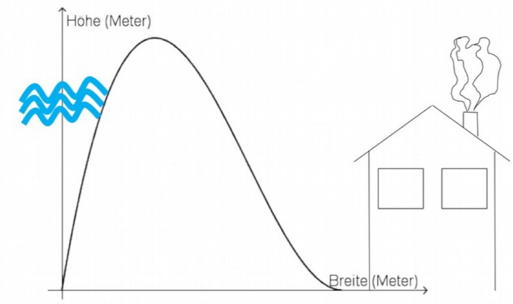
$2 = \frac{4}{3}\cdot 3^3 - \frac{8}{2}\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + C$ $P(3|2) \rightarrow x=3,\ F(x)=2$

$2 = -18 + C$ nach $C$ auflösen

$c = 20$ $\Rightarrow F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{2}x^2 - 6x + 20$

**Aufgabe 4: Sand-Volumen eines Deiches**

An der niederländischen Küste soll ein Deich aus Sand mit einer Länge von $4\,km$ errichtet werden. Der Querschnitt wird durch die Funktionsgleichung $f(x)=\frac{1}{8}x\cdot(x-8)^2$ beschrieben ( $x$ und $f(x)$ in $m$ ).




Berechne die Sandmenge in Kubikmetern, die für den Deich notwendig ist.

$f(x) = \frac{1}{8}x\cdot(x-8)^2 = \frac{1}{8}x\cdot(x^2-16x+64) = \frac{1}{8}x^3 - 2x^2 + 8x$

① Nullstellen von $f(x)$

$f(x) = 0$

$\frac{1}{8}x\cdot(x-8)^2 = 0$

$\frac{1}{8}x = 0$ oder $(x-8)^2 = 0$

$x = 0$ $\quad x = 8$ $\quad \Rightarrow$ Nullstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$

② Fläche unter $f(x)$ im Intervall $[0;8]$ $\rightarrow$ Deichquerschnitt

$$\int_0^8 \frac{1}{8}x^3 - 2x^2 + 8x\,dx = \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^8$$

$$= \left(\frac{1}{32}\cdot 8^4 - \frac{2}{3}\cdot 8^3 + 4\cdot 8^2\right) - 0$$

$$= \frac{128}{3} \approx 42{,}67\ m^2$$

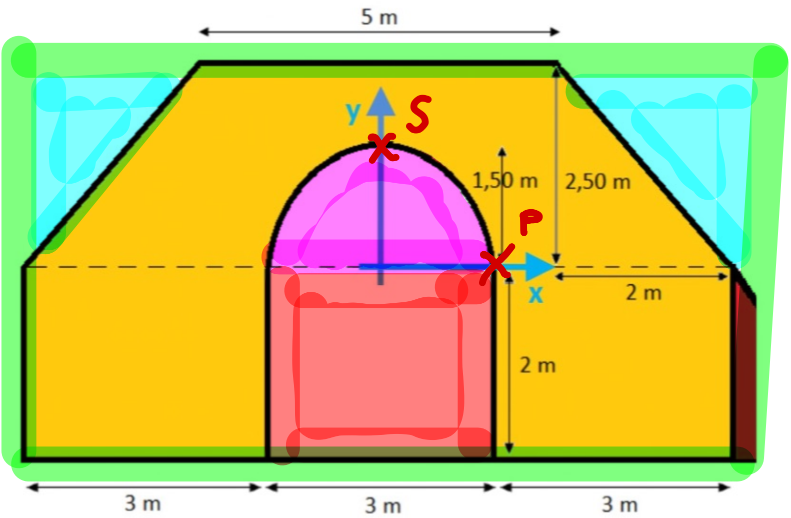
③ benötigte Sandmenge

$$\frac{128}{3}\,m^2 \cdot 4.000\,m = \frac{512.000}{3}\,m^3 \approx \underline{\underline{170.666{,}67\ m^3}}$$

## Aufgabe 5: Verputzungsfläche des Parpaillon-Tunnelportals

Das Portal des Tunnels durch den Col du Parpaillon in den französischen Alpen muss dringend saniert werden. Die Tunnelöffnung ist 3 m breit (s. Bauskizze). In einer Höhe von 2 m über dem Tunnelboden verjüngt sich die Öffnung parabelförmig, so dass der Tunnel in der Mitte insgesamt 3,50 m hoch ist. Die gelb eingefärbte Fläche des Portals soll im Rahmen der Sanierung verputzt werden.

Ermittle rechnerisch, wie teuer die zu verputzende Fläche kommt, wenn ein Quadratmeter mit Kosten von 20,- € veranschlagt wird. (Alle Maße sind der Bauskizze entnehmbar.)




① Funktionsgleichung des Tunnels (obere "Hälfte")

$f(x) = a \cdot (x-d)^2 + e$ Scheitelpunkt bei $S(0|1,5)$

$f(x) = a \cdot x^2 + 1,5$ $P(1,5|0) \Rightarrow x = 1,5,\ f(x) = 0$

$0 = a \cdot 1,5^2 + 1,5$

$a = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 1,5$

② Nullstellen von $f(x)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x^2 + 1,5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1,5$

③ Fläche unter f im Intervall $[-1,5; 1,5]$

$\int_{-1,5}^{1,5} -\frac{2}{3}x^2 + 1,5\,dx = \left[-\frac{2}{9}x^3 + 1,5x\right]_{-1,5}^{1,5} = 3$

④ Gesuchte Fläche + Kosten

Fläche = Gesamtes Rechteck − 2 Dreiecke − Tunnelfläche − Rechteck

$A = 9 \cdot 4,5 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,5\right) - 3 - 2 \cdot 3$

$= 40,5 - 5 - 3 - 6 = 26,5\ m^2$ Kosten: $26,5 \cdot 20 = \underline{\underline{530\ €}}$

**Aufgabe 6: Drag Racing**

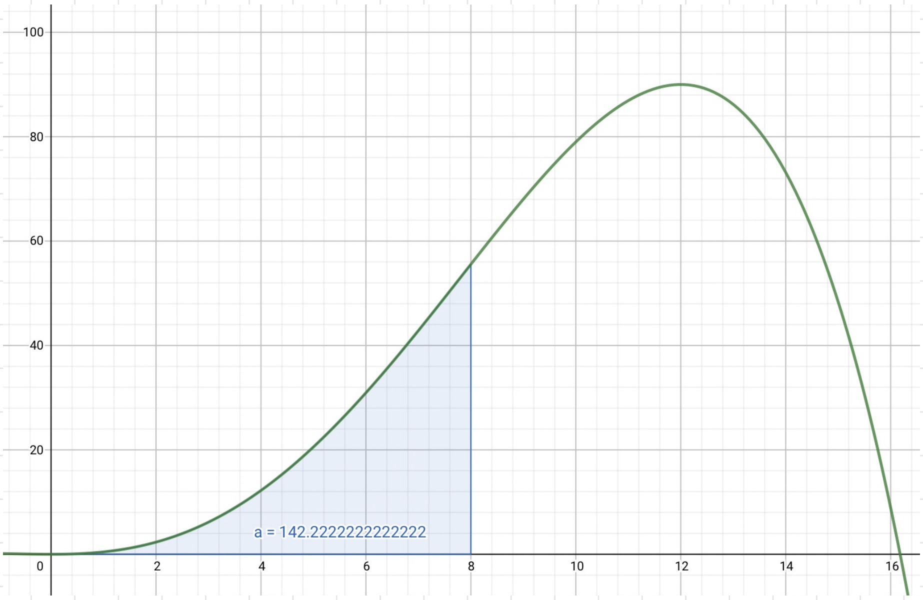
Rekon-struk-tion

HDI

1964 wurde beim einem Drag Race als erstes die rekordverdächtige $200\,mph$ -Marke ( $320\,km/h$ ) erreicht.

Die Funktion $v(t)=\frac{-25}{2304}t^4+\frac{5}{32}t^3+\frac{5}{16}t^2$ beschreibt den Geschwindigkeitsverlauf der Rekordfahrt ( $t$ in $s$ , $v$ in $m/s$ ).

Gib einen vollständigen, vereinfachten Berechnungsansatz an, wie sich die zurückgelegte Wegstrecke innerhalb der ersten 8 Sekunden der Rekordfahrt bestimmen lässt.




$$\int_0^8 -\frac{25}{2304}t^4+\frac{5}{32}t^3+\frac{5}{16}t^2\,dt$$

$$= \left[-\frac{5}{2304}t^5+\frac{5}{128}t^4+\frac{5}{48}t^3\right]_0^8$$

$$= \left(-\frac{5}{2304}\cdot 8^5+\frac{5}{128}\cdot 8^4+\frac{5}{48}\cdot 8^3\right)-0$$

$$= \frac{1280}{9} \approx 142{,}22$$

nicht gefragt