Hinweise für den Prüfling

Auswahlzeit: 45 Minuten

Bearbeitungszeit (insgesamt): 180 Minuten

Auswahlverfahren

Wählen Sie aus den Aufgabengruppen A und B jeweils einen Vorschlag zur Bearbeitung aus. Der vorliegende Aufgabenvorschlag C ist ein Pflichtvorschlag. Die nicht ausgewählten Vorschläge müssen am Ende der Auswahlzeit der Aufsicht führenden Lehrkraft zurückgegeben werden.

Erlaubte Hilfsmittel

1. ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
2. ein wissenschaftlich-technischer Taschenrechner (WTR) ohne Grafik, ohne CAS **oder** ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) ohne CAS
3. eine gedruckte Formelsammlung der Schulbuchverlage
4. eine Liste der fachspezifischen Operatoren

Sonstige Hinweise

keine

In jedem Fall vom Prüfling auszufüllen

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Prüferin/Prüfer: ______________________ Datum: ______________________

Analysis

Aufgaben

Eine Käferpopulation besteht zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt aus 50.000 Exemplaren. Zwar kommen jedes Jahr durch Fortpflanzung neue Käfer hinzu, gleichzeitig wird die Population aber durch natürliche Feinde dezimiert.
Die Entwicklung der Käferpopulation kann durch die folgende Funktion k beschrieben werden:

$$k(t) = (50 + 25t) \cdot e^{-0,1t} \quad \text{mit } t \geq 0$$

Dabei gilt Folgendes: 1 Einheit der Funktionswerte ≙ 1000 Käfer
1 Einheit der t-Werte ≙ 1 Jahr

Im Material ist der Graph von k abgebildet.

1. Berechnen Sie ohne Bezugnahme auf den Graphen von k die Extrem- und Wendepunkte des Graphen innerhalb des betrachteten Intervalls unter Zuhilfenahme der ersten Ableitung $k'(t) = (20 - 2,5t) \cdot e^{-0,1t}$.
   Begründen Sie das Grenzwertverhalten des Graphen für $t \to +\infty$ anhand des Funktionsterms von k.

   (16 BE)

2. Beschreiben Sie unter Verwendung der Begriffe „Populationsgröße“ und „Wachstumsgeschwindigkeit“ die Entwicklung der Käferpopulation. Deuten Sie dabei sowohl die Extrem- und Wendepunkte als auch den Grenzwert des Graphen aus Aufgabe 1.

   (8 BE)

3. Zeigen Sie, dass K mit $K(t) = (-250t - 3000) \cdot e^{-0,1t}$ eine Stammfunktion von k ist. Berechnen Sie den Wert von $\frac{1000}{30} \cdot \int_{20}^{50} k(t)\,dt$ und deuten Sie diesen im Sachzusammenhang.

   (8 BE)

4. Die Funktion k beschreibt die Entwicklung der Käferpopulation nur für die ersten 55 Jahre recht gut. Ab dem Zeitpunkt t = 55 bleibt bei einer verbesserten Beschreibung die zu diesem Zeitpunkt erreichte Wachstumsgeschwindigkeit konstant, sodass für t > 55 ein lineares Wachstum vorliegt.
   Berechnen Sie die momentane Wachstumsgeschwindigkeit bei t = 55 und bestimmen Sie mithilfe der Funktionsgleichung, die ab diesem Zeitpunkt die Populationsgröße beschreibt, den voraussichtlichen Zeitpunkt des Aussterbens der Käferpopulation.

   (8 BE)

Material