9. Rekonstruktionen von Funktionen

1. a) Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 2ax + b$ 181

$f(0) = -2{,}5 \qquad c = -2{,}5$

$f'(3) = 0 \qquad 6a + b = 0$

$f(3) = 2 \qquad 9a + 3b - 2{,}5 = -0{,}5\ ,\ a = -\frac{1}{2},\quad b = 3$

Resultat: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2{,}5$

b) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

$f(-2) = 6 \qquad -8a + 4b - 2c + d = 6$

$f''(-2) = 0 \qquad -12a + 2b = 0$

$f'(-4) = 0 \qquad 48a - 8b + c = 0$

$f'(-2) = -12 \qquad 12a - 4b + c = -12\ ,\ 36a - 4b = 12\ ,\ a = 1\ ,\ b = 6\ ,\ c = 0\ ,\ d = -10$

Resultat: $f(x) = x^3 + 6x^2 - 10$

2. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$ 3. $f(x) = x^3 - 3x$ 183

4. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$, $f(0) = g(0)$, $f'(0) = -\frac{1}{g'(0)}$, $f(1) = g(1) \Rightarrow f(x) = 4{,}5x^3 - 2x$

5. $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$ 6. $f(x) = -x^3 + 3x^2$

7. a) $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - 3$ b) $f(x) = \frac{9}{8}x^4 + 3x^3$

8. a) $f(x) = \frac{2}{9}(x-3)^2$ b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 4$

9. a) $f(x) = x^3 - 3x$ b) $f(x) = -x^3 + 3x^2$ 184

10. a) $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0\ ,\ f(50) = 0 \Rightarrow 2500a + 50b = 0$ 186

$f(25) = 12{,}5 \Rightarrow 625a + 25b = 12{,}5 \Rightarrow 50b = 50 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{50}$

Resultat: $f(x) = -\frac{1}{50}x^2 + x$

b) $f(47) = -\frac{1}{50}47^2 + 47 = 2{,}82$

Resultat: Der Torwart hat keine Chance, da ihm 12 cm fehlen.

c) $\tan\alpha = f'(0) = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

d) Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0\ ,\ f(50) = 0 \Rightarrow 2500a + 50b = 0$

$f(25) = 15 \Rightarrow 625a + 25b = 15 \Rightarrow 50b = 60 \Rightarrow b = 1{,}2 \Rightarrow a = -\frac{3}{125}$

Resultat: $f(x) = -\frac{3}{125}x^2 + 1{,}2x$

$f'(x) = -\frac{6}{125}x + 1{,}2\ ,\ f'(0) = 1{,}2 \Rightarrow \tan\alpha = 1{,}2 \Rightarrow \alpha \approx 50{,}19°$

186 11. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0) = -1 \qquad c = -1$

$f'(4) = 2 \qquad 48a + 8b = 3$

$f(4) = 0 \qquad 64a + 16b = 4$, $a = \frac{1}{16}$, $b = 0$

Resultat: $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - x$

a) Südlichster Punkt: $T(2{,}31|-1{,}54)$

b) Nein, denn eine Parabel hätte in ihren beiden Nullstellen - abgesehen vom Vorzeichen - die gleiche Steigung. Dies ist hier nicht der Fall.

12. a) $f'(x) = 2ax + b$, $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, $f'(0) = 0{,}5 \Rightarrow b = 0{,}5$

$f'(100) = -1 \Rightarrow 200a + 0{,}5 = -1 \Rightarrow a = -\frac{3}{400}$

Resultat: $f(x) = -\frac{3}{400}x^2 + 0{,}5x$

b) $f(100) = -25$, der Höhenunterschied beträgt 25 m.

c) $f(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = \frac{200}{3} \approx 66{,}67$

Der höchste Punkt der Bahn liegt genau zwischen den Nullstellen, also bei $\frac{100}{3} \approx 33{,}33$ m.

$f(\frac{100}{3}) = 8{,}33$. Der höchste Punkt liegt 8,33 m höher als Punkt A.

187 13. a) $B(v) = av^2 + bv + c$

$B(10) = 9{,}1: \quad 100a + 10b + c = 9{,}1$

$B(30) = 7{,}9: \quad 900a + 30b + c = 7{,}9$, $\quad 800a + 20b = -1{,}2$

$B(100) = 10: \quad 10000a + 100b + c = 10$, $\quad 9900a + 90b = 0{,}9$, $\quad 6300a = 6{,}3$

$a = \frac{1}{1000}$, $b = -\frac{1}{10}$, $c = 10$, $\quad B(v) = \frac{1}{1000}v^2 - \frac{1}{10}v + 10$

b) $B'(v) = \frac{1}{500}v - \frac{1}{10} = 0$ gilt für $v = 50$, $B(50) = 7{,}5$ minimaler Spritverbrauch bei $v = 50$ km/h

c) $B(v) = 12{,}4$: $v^2 - 100v - 2400 = 0$, $v = 120$ km/h

14. a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(-4) = 0: \quad 48a - 8b + c = 0$

$f'(0) = 0: \quad c = 0$

$f(-4) = 2: \quad -64a + 16b = 2$, $32a = 2$, $a = \frac{1}{16}$, $b = \frac{3}{8}$

$f(x) = \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{8}x^2$, $\quad g(x) = -\frac{1}{8}(x-9)^2 + 2 = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{18}{8}x - \frac{65}{8}$

b) $f''(x) = \frac{3}{8}x + \frac{3}{4} = 0$ für $x = -2$, $f(-2) = 1$

In $P(-2|1)$ ist f mit $f'(-2) = -0{,}75$ am steilsten abfallend.

$g'(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

Am linken Rand, in $Q(5|0)$ ist g mit $g'(5) = 1$ am steilsten ansteigend.

15. a) $h(0) = 0$ d.h. $d = 0 \qquad h'(t) = 3at^2 + 2bt$

$h'(0) = 0$ d.h. $c = 0$

$h(4) = 2 \qquad 64a + 16b = 2$

$h'(4) = 0{,}75 \qquad 48a + 8b = 0{,}75$, $-32a = 0{,}5$, $a = -\frac{1}{64}$, $b = \frac{3}{16}$, $h(t) = -\frac{1}{64}t^3 + \frac{3}{16}t^2$

b) $h'(t) = -\frac{3}{64}t^2 + \frac{3}{8}t = 0$ gilt für $t = 8$, $h(8) = 4$ m maximale Höhe nach 8 Wochen

c) $h''(t) = -\frac{6}{64}t + \frac{3}{8} = 0$ gilt für $t = 4$, $h'(4) = 0{,}75$ nach 4 Wochen

188

16. a) f(0) = 4 d.h. d = 4 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(10) = 0 \quad 300a + 20b + c = 0$

$f'(30) = 0 \quad 2700a + 60b + c = 0 \quad , \quad 2400a + 40b = 0$

$f(10) = 10 \quad 1000a + 100b + 10c = 6 , \quad -2000a - 100b = 6 ,$

$a = \frac{3}{2000}, \quad b = -\frac{9}{100}, \quad c = \frac{135}{100}, \quad f(x) = \frac{3}{2000}x^3 - \frac{9}{100}x^2 + \frac{135}{100}x + 4$

b) $g(x) = -\frac{1}{10}(x-40)^2 + 10 = -\frac{1}{10}x^2 + 8x - 150$

c) $f'(x) = \frac{9}{2000}x^2 - \frac{18}{100}x + \frac{135}{100} = 0 \Rightarrow \quad x^2 - 40x + 300 = 0, \quad x = 10$ und $x = 30$

Tiefste Stelle bei x = 30: f(30) = 4; das Dach ist dort 4 m hoch.

d) $f'(0) = \frac{135}{100}$ ist die Steigung am linken Rand.

$g'(x) = -\frac{1}{5}x + 8$, g'(50) = -2 ist die Steigung am rechten Rand.

f '(40) = 1,35 ist die Steigung an der Dachspitze.

e) tan 40° = 0,8391 , $f''(x) = \frac{9}{1000}x - 0{,}18 = 0$ gilt für x = 20 , f '(20) = -0,45

d.h. für 10 < x < 30 ist das Dach bei x = 20 mit m = -0,45 am steilsten und daher begehbar.

Ansatz: $\frac{9}{2000}x^2 - \frac{18}{100}x + 1{,}35 = 0{,}84 , \quad x^2 - 40x + \frac{340}{4} = 0$

Dies gilt für x = 3,1 und x = 36,9, also ist das Dach für x < 3,1 und für 36,9 < x < 40 schwer begehbar.

$g'(x) = -\frac{1}{5}x + 8 = -0{,}84$ gilt für x = 44,25

d.h. auch für x > 44,25 ist das Dach schwer begehbar.

17. a) $f(x) = -10 - \frac{1}{50}x^2$

b) Benötigt werden: Ein Pfeiler der Länge f(0) = 10
und je zwei Pfeiler der Längen 13,125 m, 22,5 m , 38,125 m und 60 m.

c) Das rechtwinklige Dreieck, das den 60 m-Pfeiler als Seite hat, ist gleichschenklig, also ist die Strecke von der 50 m-Marke bis B ebenfalls 60 m lang.
Damit gilt |A;B| = 220 m.

d) $f'(x) = -\frac{1}{25}x$, f '(50) = –2 , Steigungswinkel: 63,4°; Schnittwinkel: 180°-45°-63,4°= 71,6°

18. a) $f(x) = ax^2 + bx + c , \; f'(x) = 2ax + b$

$f'(9) = 0: \quad 18a + b = 0$

$f(0) = 2 \quad c = 2$

$f(20) = 0 \quad 400a + 20b + 2 = 0 , \; 40a = -2 , \; a = -\frac{1}{20}, \quad b = \frac{18}{20}, \quad f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{18}{20}x + 2$

b) $f'(x) = -\frac{1}{10}x + \frac{18}{20}$, f '(0) = 0,9 d.h. Abwurfwinkel ca. 42°

f '(20) = –1,1 d.h. Aufschlagwinkel ca. –47,7°

c) $\alpha = 45°$: f '(0) = 1 , b = 1

$f'(9) = 18a + 1 = 0 , \quad a = -\frac{1}{18}$

$f(x) = -\frac{1}{18}x^2 + x + 2 , \quad f'(x) = -\frac{1}{9}x + 1$

f(x) = 0: $x^2 - 18x - 36 = 0$, x = 19,82 m neue Wurfweite

f '(19,82) = –1,2 , neuer Aufschlagwinkel ca. –50,2°

Maximalhöhe: f(9) = 6,5 m