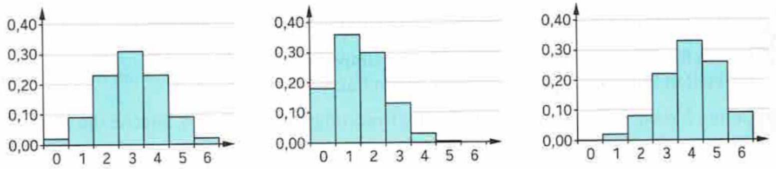
Quelle : Westermann, Finale Prüfungstraining Landesabitur Mathematik 2019

Aufgabe 28

Ein Glücksrad ist in 12 gleich große Sektoren unterteilt; diese sind gefärbt. Bei einem Spiel wird das Glücksrad mehrfach gedreht. Man gewinnt jedesmal einen Gutschein, wenn der Zeiger auf einem Sektor stehen bleibt, der in einer bestimmten Farbe gefärbt ist.

(1) Geben Sie eine mögliche Färbung der Sektoren sowie ein mögliches Ereignis an, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis gegeben ist durch $\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$. I2 J3

(2) 3 der 12 Sektoren sind rot gefärbt. Man gewinnt, wenn der Zeiger auf einem roten Feld stehen bleibt. Welches der folgenden Histogramme passt zu der Zufallsgröße X: *Anzahl der Gewinne beim 6-fachen Drehen des Glücksrads*?
Begründen Sie Ihre Entscheidung. J3



Aufgabe 31

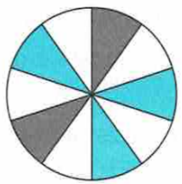
Zwei Spielwürfel W1 und W2 sind mit den Buchstaben E (= Erfolg) und M (= Misserfolg) beschriftet, und zwar hat W1 vier Flächen, die ein E tragen, und W2 zwei solcher Flächen.

(1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X_i: *Anzahl der Würfe mit Augenzahl „E" beim 3-fachen Werfen des Würfel W_i* J3

(2) Beim 3-fachen Werfen eines der beiden Würfel trat 2-mal „E" auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war es Würfel W1, der geworfen wurde? I4

Aufgabe 32

Bei einem Spiel wird das abgebildete Glücksrad zweimal gedreht. Der Zeiger kann auf einem der weiß (w), blau (b) oder grau (g) gefärbten Sektoren stehen bleiben.



(1) Stellen Sie die möglichen Abläufe des Zufallsversuchs mithilfe eines Baumdiagramms dar. I2

(2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: *Das Rad bleibt zweimal hintereinander auf einem Sektor mit gleicher Färbung stehen.* J2

(3) Der Spielveranstalter plant für das Spiel einen Einsatz von 1 € und man soll 2 € ausgezahlt bekommen, wenn das Ereignis E eintritt. Bewerten Sie diese Spielregel.

Aufgabe 33

(1) Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern n = 50 und $p = \frac{1}{3}$.
Berechnen Sie die Standardabweichung σ. J5

(2) Eine Zufallsgröße Y ist binomialverteilt mit dem Parameter n = 100. Für die Standardabweichung von Y gilt: σ = 4. Berechnen Sie mögliche Erfolgswahrscheinlichkeiten p und zugehörige Erwartungswerte. J5

Aufgabe 29

(1) Bei einem Glücksspiel gewinnt man mit Wahrscheinlichkeit p = 0,25.
Ordnen Sie den folgenden Ereignissen den richtigen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit zu: I2 J3

E_1: In 5 Spielen gewinnt man mindestens 4-mal.
E_2: In 5 Spielen hat man mehr Spiele, in denen man gewinnt, als Spiele, in denen man verliert.
E_3: In 5 Spielen gewinnt man öfter als erwartet.

$P_1 = 10\cdot 0{,}25^3\cdot 0{,}75^2 + 5\cdot 0{,}25^4\cdot 0{,}75 + 0{,}25^5$

$P_2 = 1 - (0{,}75^5 + 5\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25)$

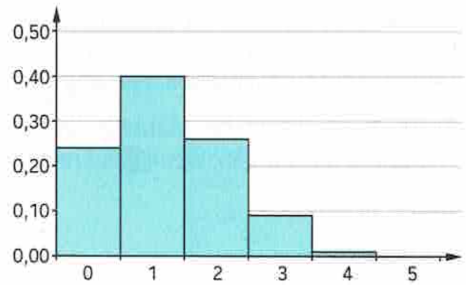
$P_3 = 5\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25 + 0{,}75^5$

$P_4 = 1 - (0{,}25^5 + 5\cdot 0{,}25^4\cdot 0{,}75)$

$P_5 = 10\cdot 0{,}75^3\cdot 0{,}25^2 + 5\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25 + 0{,}75^5$

$P_6 = 5\cdot 0{,}25^4\cdot 0{,}75 + 0{,}25^5$

(2) Das Histogramm zeigt die Binomialverteilung mit n = 5 und p = 0,25. Ermitteln Sie mithilfe der Grafik ungefähre Werte für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1, E_2, E_3.



Aufgabe 30

In einer Urne befinden sich 3 weiße und 6 schwarze Kugeln.

(1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, eine weiße bzw. eine schwarze Kugel zu ziehen.

(2) Aus der Urne werden Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: *Beim 3-fachen Ziehen werden genau zwei weiße Kugeln gezogen.* I2 J2 J3

(3) In einer anderen Urne liegen 4 schwarze und w weiße Kugeln. Betrachten Sie die Verteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der weißen Kugeln beim 3-fachen Ziehen mit Zurücklegen*.

Bestimmen Sie eine Anzahl w so, dass man ohne konkrete Berechnung der Wahrscheinlichkeit sagen kann, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis X = 2 maximal ist.

M13,1 LÖS: Stochastik ohne Hilfsmittel 27.1.21
(zu AB vom 25.1.) (Westermann Finale)

Lösung Aufgabe 29

(1) Mithilfe der Zufallsgröße X: *Anzahl der Erfolge* ergibt sich

$P(E_1) = P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 5 \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75 + 0{,}25^5 = P_6$

$P(E_2) = P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$= 10 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^2 + 5 \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75 + 0{,}25^5 = P_1$

$\mu = 5 \cdot 0{,}25 = 1{,}25$, also

$P(E_3) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$

$= 1 - (0{,}75^5 + 5 \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25) = P_2$

(2) Im Histogramm kann man ablesen: $P(X = 0) \approx 0{,}24$; $P(X = 1) \approx 0{,}40$; $P(X = 2) \approx 0{,}26$; $P(X = 3) \approx 0{,}09$; $P(X = 4) \approx 0{,}01$; $P(X = 5) \approx 0$.

Hieraus ergibt sich:

$P(E_1) = P(X = 4) + P(X = 5) \approx 0{,}01$,

$P(E_2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \approx 0{,}10$,

$P(E_3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.

Lösung Aufgabe 30

(1) $P(\text{weiß}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $P(\text{schwarz}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

(2) $P(E) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$

(3) Die Wahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsgröße ist in der Nähe des Erwartungswerts $\mu = n \cdot p$ maximal. Aus $2 \approx 3 \cdot p$ folgt $p = \frac{2}{3}$. Der Anteil der weißen Kugeln in der Urne müsste also ungefähr $\frac{2}{3}$ sein. Dies ist erfüllt, wenn w = 8 ist.

Hinweis: Auch für w = 7, also $p = \frac{7}{11}$, ergibt sich eine Binomialverteilung, deren Maximum bei k = 2 liegt. Das Gleiche gilt auch noch für w = 6, w = 5, aber auch für w = 9, w = 10, w = 11. Für w = 4 (also p = 0,5) und für w = 12 (also p = 0,75) ergeben sich Binomialverteilungen, die zwei Maxima haben, nämlich für p = 0,5 bei k = 1 und k = 2 und für p = 0,75 bei k = 2 und k = 3.

Lösung Aufgabe 31

(1) Die Erfolgswahrscheinlichkeiten sind: $p_1 = \frac{2}{3}$ und $p_2 = \frac{1}{3}$.

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen gilt:

k	0	1	2	3
$P(X_1 = k)$	$\binom{3}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$	$\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27}$	$\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{12}{27}$	$\binom{3}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}$

k	0	1	2	3
$P(X_2 = k)$	$\binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$	$\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$	$\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27}$	$\binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$

(2) Da sich die Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis X = 2 wie 2 zu 1 verhalten, ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um Würfel W1 handelt, gleich $\frac{2}{3}$.

Aufwendige Lösung mithilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten:

$$P_{X=2}(W1) = \frac{P(X = 2 \cap W1)}{P(X = 2)} = \frac{P(X = 2 \cap W1)}{P(X = 2 \cap W1) + P(X = 2 \cap W2)} = \frac{\frac{6}{27}}{\frac{6}{27} + \frac{3}{27}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Lösung Aufgabe 28

(1) Der Term steht für die Wahrscheinlichkeit für 2 Erfolge bei einem 5-stufigen BERNOULLI-Versuch mit $p = \frac{1}{3}$. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn 4 der 12 Sektoren in der Gewinnfarbe gefärbt sind und das Glücksrad bei 5 Umdrehungen 2-mal auf einem solchen Sektor stehen bleibt.

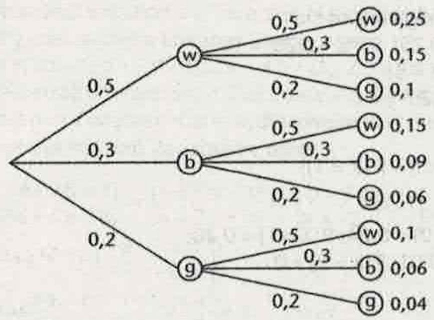
Hinweis: Da $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$, steht der Term auch für 3 Erfolge bei einem 5-stufigen BERNOULLI-Versuch mit $p = \frac{2}{3}$. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn 8 der 12 Sektoren in der Gewinnfarbe gefärbt sind und das Glücksrad bei 5 Umdrehungen 3-mal auf einem solchen Sektor stehen bleibt.

(2) Wenn $p = \frac{1}{4}$ ist, liegt das Maximum der Verteilung bei einem der Nachbarwerte von $\mu = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$, also bei k = 1 oder k = 2; diese Bedingung wird nur von der 2. Grafik erfüllt.

Hinweis: Die 1. Grafik zeigt ein symmetrisches Histogramm, also das für p = 0,5. Das Histogramm rechts gehört zu $p = \frac{2}{3}$ mit einem Maximum bei k = 4.

Lösung Aufgabe 32

(1)



(2) $P(E) = 0{,}5^2 + 0{,}3^2 + 0{,}2^2 = 0{,}38$

(3) Zufallsgröße X: *Auszahlung in €*

$E(X) = 0{,}38 \cdot 2\,€ + 0{,}62 \cdot 0\,€ = 0{,}76\,€$

Im Mittel werden pro Spiel 0,76 € ausgezahlt, d.h. der Spielbetreiber hat im Mittel einen Gewinn von 0,24 € pro Spiel.

Lösung Aufgabe 33

(1) $\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{100}{3^2}} = \frac{10}{3}$.

(2) Aus $\sigma = 4 = \sqrt{100 \cdot p \cdot (1 - p)}$, also $100 \cdot p \cdot (1 - p) = 16$ und somit $p \cdot (1 - p) = 0{,}16$, ergibt sich $p_1 = 0{,}2$ und $1 - p_1 = 0{,}8$ oder umgekehrt $p_2 = 0{,}8$ und $1 - p_2 = 0{,}2$.

Hieraus ergeben sich die Erwartungswerte $\mu_1 = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ bzw. $\mu_2 = 100 \cdot 0{,}8 = 80$.