

2 Aufstellen von Funktionen mit Randbedingungen

Tipps ab Seite 83, Lösungen ab Seite 118

Hier geht es darum, eine Funktion so aufzustellen, dass sie bestimmte vorgegebene Bedingungen erfüllt. Dazu wird die gesuchte Funktion zuerst in ihrer allgemeinen Form aufgeschrieben. Aus dieser können Sie die Anzahl der benötigten Parameter ablesen. Für jeden dieser Parameter brauchen Sie eine «Information» aus der Aufgabenstellung. Aus jeder «Information» ergibt sich eine Gleichung. Damit erhalten Sie ein Gleichungssystem, welches Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen können.

Beispiel:

Gesucht ist der Ansatz zur Bestimmung der Gleichung einer Parabel mit Tiefpunkt $(1 \mid -4)$, die durch den Punkt $(0 \mid -3)$ geht.

Die allgemeine Parabelgleichung lautet: $f(x) = ax^2 + bx + c$, die Ableitung ist $f'(x) = 2ax + b$. Es sind also drei Parameter zu bestimmen. Folgende Bedingungen müssen gelten:

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -4,$$

$$f'(1) = 2a \cdot 1 + b = 0 \text{ (weil es sich um einen Tiefpunkt mit waagerechter Tangente handelt) und}$$

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -3. \text{ Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad a + b + c = -4 \\ \text{II} \quad 2a + b = 0 \\ \text{III} \quad c = -3 \end{array}$$

Aus Gleichung III liest man $c = -3$ ab. Damit erhält man:

$$\begin{array}{l} \text{Ia} \quad a + b = -1 \\ \text{II} \quad 2a + b = 0 \\ \text{III} \quad c = -3 \end{array}$$

Subtrahiert man Gleichung Ia von Gleichung II, erhält man $a = 1$ und durch einsetzen $b = -2$. Damit lautet die Gleichung der gesuchten Parabel $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Für andere Funktionenklassen (e -Funktionen, etc.) ist die Vorgehensweise analog: Immer stellt man zuerst die Funktionsgleichung auf und bestimmt dann die Parameter.

2.1 Ganzrationale Funktionen

- Eine Parabel geht durch $P_1(0 \mid 4)$, $P_2(1 \mid 0)$ und $P_3(2 \mid 18)$. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Parabel.
- Eine Parabel hat den Hochpunkt $M(1 \mid 3)$ und geht durch $Q(0 \mid 2)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.
- Eine zur y -Achse symmetrische Parabel hat in $P(1 \mid 6)$ die Steigung 2. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

- d) Eine zur y -Achse symmetrische Parabel schneidet die x -Achse an der Stelle $x = \sqrt{3}$ und geht durch $T(0 \mid -3)$. Bestimmen Sie die Gleichung der dazugehörigen Funktion.
- e) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat den Wendepunkt $W(0 \mid 0)$ und den Hochpunkt $H(2 \mid 2)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion.
- f) Eine Parabel dritten Grades (kubische Parabel) hat im Punkt $P(0 \mid 1)$ die Steigung $m_P = -1$; ihr Wendepunkt ist $W(-1 \mid 4)$. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Parabel.
- g) Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = ax^4 + bx^2$ den Wendepunkt $W(1 \mid -2,5)$ hat.

2.2 Exponentialfunktionen

Die allgemeine e -Funktion für natürliches exponentielles Wachstum hat die Gestalt: $f(x) = a \cdot e^{kx}$. Bestimmen Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils die Parameter a und k .

- a) Eine e -Funktion geht durch die Punkte $P(0 \mid 2)$ und $Q(4 \mid 2e^{12})$.
- b) Eine e -Funktion geht durch die Punkte $A(0 \mid 3)$ und $B(2 \mid 3e^8)$.
- c) Bei einer e -Funktion ist $f'(0) = 6$ und $f(0) = 3$.
- d) Bei einer e -Funktion ist $f'(0) = 4$ und $f(0) = 2$.
- e) Eine e -Funktion hat den Anfangswert $f(0) = 5$ und für $x = 0$ die Steigung 10.

2.3 Trigonometrische Funktionen

Tipp: Eine verallgemeinerte Sinusfunktion hat die Gleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d.$$

- a) Der Graph der Sinusfunktion g mit $g(x) = \sin x$ ist um 3 LE nach oben verschoben und hat die Periode $p = \pi$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der modifizierten Funktion.
- b) Der Graph der Sinusfunktion g mit $g(x) = \sin x$ ist um den Faktor 2,5 in y -Richtung gestreckt, hat die Periode $p = \frac{\pi}{2}$ und ist um 3 LE nach rechts und sowie 1,5 LE nach unten verschoben. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der modifizierten Funktion.
- c) Der Graph der Sinusfunktion g mit $g(x) = \sin x$ ist um 2 LE nach links und um 4 LE nach oben verschoben, um den Faktor 0,8 in y -Richtung gestaucht und der Abstand zwischen zwei Hochpunkten beträgt 3π LE. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der modifizierten Funktion.
- d) Der Graph der Sinusfunktion g mit $g(x) = \sin x$ ist um 1 LE nach rechts und um 2 LE nach unten verschoben, um den Faktor 1,7 in y -Richtung gestreckt und der Abstand zwischen zwei Wendepunkten beträgt $\frac{\pi}{2}$ LE. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der modifizierten Funktion.