2. Trigonometrie

45 **Einstiegsseite:**
- ➜ Dreiecke lassen sich eindeutiger festlegen als Vierecke (Kongruenzsätze).
- ➜ Trigonometrie kommt aus dem Griechischen: Dreieck bzw. Dreiecksberechnung.

Lernfeld: Alles über Dreiecke

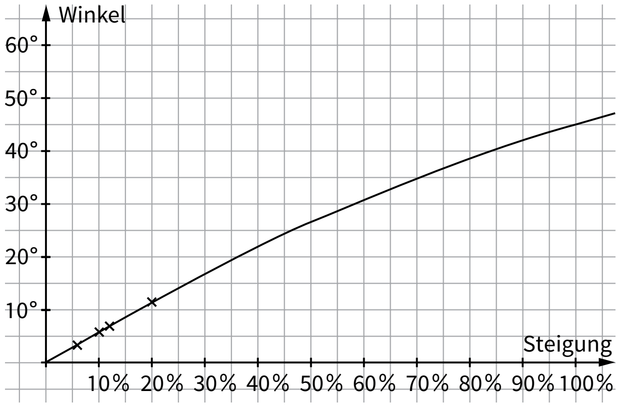
46 **1. Auftrag: Behindertengerechte Planung**

➜ Höhe der Stufen: je ca. 17 cm
Länge der Stufen: je ca. 30 cm
Steigung: $\frac{3 \cdot 17}{3 \cdot 30} = 56{,}67\,\%$

➜

Steigung (in %)	Winkel (in Grad)
6	3,43
10	5,71
12	6,84
20	11,31

➜



➜ Keine Lösungen

2.1 Sinus, Kosinus und Tangens

47 **Einstieg:**

(1) 0,294 m
(2) 0,588 m
Der Gleitwinkel ist jeweils 1,68°. Der Gleitwinkel ist in beiden Fällen gleich, da die prozentuale Steigung in beiden Fällen gleich ist.

49

2. **(1)** $\sin(\alpha) = 0{,}5$ $\cos(\alpha) = 0{,}866$ $\tan(\alpha) = 0{,}577$
(2) $\sin(\alpha) = 0{,}695$ $\cos(\alpha) = 0{,}719$ $\tan(\alpha) = 0{,}966$

3. **a)** $\tan(\beta) = \frac{b}{c}$ $\cos(\beta) = \frac{c}{a}$ $\sin(\beta) = \frac{b}{a}$
$\tan(\gamma) = \frac{c}{b}$ $\cos(\gamma) = \frac{b}{a}$ $\sin(\gamma) = \frac{c}{a}$

b) $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$ $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$ $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$
$\tan(\gamma) = \frac{c}{a}$ $\cos(\gamma) = \frac{a}{b}$ $\sin(\gamma) = \frac{c}{b}$

c) $\tan(\alpha) = \frac{r}{s}$ $\cos(\alpha) = \frac{s}{t}$ $\sin(\alpha) = \frac{r}{t}$
$\tan(\beta) = \frac{s}{r}$ $\cos(\beta) = \frac{r}{t}$ $\sin(\beta) = \frac{s}{t}$

4. **a)** $\sin(36°) = \frac{7{,}4}{12{,}6} \approx 0{,}587$, $\cos(36°) = \frac{10{,}2}{12{,}6} \approx 0{,}810$; $\tan(36°) \approx \frac{7{,}4}{10{,}2} \approx 0{,}725$

b) $\sin(53{,}1°) = \frac{8}{10} = 0{,}8$, $\cos(53{,}1°) = \frac{6}{10} \approx 0{,}6$; $\tan(53{,}1°) \approx \frac{8}{6} \approx 1{,}333$

c) Mit dem Satz des Pythagoras erhält man für die Länge der Hypotenuse c:
$c = \sqrt{(6{,}6\,\text{cm})^2 + (11{,}2\,\text{cm})^2} = 13{,}0\,\text{cm}$
$\sin(30{,}5°) = \frac{6{,}6}{13} \approx 0{,}508$, $\cos(30{,}5°) = \frac{11{,}2}{13} \approx 0{,}862$; $\tan(30{,}5°) \approx \frac{6{,}6}{11{,}2} \approx 0{,}589$

5 **a)** $\sin(26°) = \frac{3{,}9}{8{,}9} \approx 0{,}438$; $\cos(26°) = \frac{8}{8{,}9} \approx 0{,}899$; $\tan(26°) \approx \frac{3{,}9}{8} \approx 0{,}488$
$\sin(64°) = \frac{8}{8{,}9} \approx 0{,}899$; $\cos(64°) = \frac{3{,}9}{8{,}9} \approx 0{,}438$; $\tan(64°) \approx \frac{8}{3{,}9} \approx 2{,}051$

b) $\sin(32°) = \frac{3{,}5}{6{,}6} \approx 0{,}530$; $\cos(32°) = \frac{5{,}6}{6{,}6} \approx 0{,}848$; $\tan(32°) \approx \frac{3{,}5}{5{,}6} = 0{,}625$
$\sin(58°) = \frac{5{,}6}{6{,}6} \approx 0{,}848$; $\cos(58°) = \frac{3{,}5}{6{,}6} \approx 0{,}530$; $\tan(58°) \approx \frac{5{,}6}{3{,}5} = 1{,}6$

c) Mit dem Satz des Pythagoras erhält man für die Länge der Kathete b:
$b = \sqrt{(5{,}5\,\text{cm})^2 - (4{,}5\,\text{cm})^2} = \sqrt{10}\,\text{cm} \approx 3{,}16\,\text{cm}$
$\sin(54{,}9°) = \frac{4{,}5}{5{,}5} \approx 0{,}818$; $\cos(54{,}9°) = \frac{3{,}16}{5{,}5} \approx 0{,}575$; $\tan(54{,}9°) \approx \frac{4{,}5}{3{,}16} \approx 1{,}424$
$\sin(35{,}1°) = \frac{3{,}16}{5{,}5} \approx 0{,}575$; $\cos(35{,}1°) = \frac{4{,}5}{5{,}5} \approx 0{,}818$; $\tan(35{,}1°) \approx \frac{3{,}16}{4{,}5} \approx 0{,}702$

50

6. **a)** Vanessa hat die Winkel- und Seitenbezeichnungen vertauscht.
α ist der rechte Winkel bei A. a und c sind die beiden Katheten.
Richtig wäre z. B. $\sin(\beta) = \frac{a}{c}$.

b) Vanessa hat die Längen der Strecken nicht richtig bezeichnet.
Richtig ist $\cos(\varphi) = \frac{|PQ|}{|RQ|}$.

c) Vanessa hat die Seitenbezeichnungen vertauscht. d und e sind die Katheten, f ist die Hypotenuse. Richtig ist $\tan(\delta) = \frac{d}{e}$.

50

7. a) β: 0,62; 0,79; 0,78
α: 0,79; 0,62; 1,28

b) γ: 0,74; 0,67; 1,11
β: 0,67; 0,74; 0,90

c) γ: 0,85; 0,53; 1,60
α: 0,53; 0,85; 0,62

d) α: 0,47; 0,88; 0,53
γ: 0,88; 0,47; 1,88

8. a) 41,8° **b)** 36,9° **c)** 38,7° **d)** 51,3° **e)** 44,4° **f)** 30,0° **g)** 53,1° **h)** 72,5° **i)** 36,9° **j)** 76,0°

9. $\sin(\alpha) = \cos(\beta) = 0{,}82$
$\cos(\alpha) = \sin(\beta) = 0{,}57$

10. a) Der Sinus ist nicht proportional zum Winkel.
b) Kosinus und Tangens sind ebenfalls nicht proportional zum Winkel.

11. a) **(1)** $\sqrt{(4\,628\,\text{m})^2 - (1\,635\,\text{m})^2} \approx 4\,329{,}6\,\text{m}$
(2) $\sin(\alpha) = \frac{1\,635}{4\,329{,}6} \approx 0{,}378$, also $\alpha \approx 22{,}2°$
b) Der Sinus des Steigungswinkels ist der Quotient aus der Höhendifferenz und der Länge der Bahn. Der Kosinus des Steigungswinkels ist der Quotient aus der Luftlinienentfernung und der Länge der Bahn. Der Tangens des Steigungswinkels ist der Quotient aus der Höhendifferenz und der Luftlinienentfernung.

2.2 Bestimmen von Werten für Sinus, Kosinus und Tangens – Zusammenhänge

51

Einstieg:
Eine Wertetabelle befindet sich auf Seite 51 im Schülerband.

52

3. a) Sei ABC ein standardmäßig bezeichnetes Dreieck. Der 90° Winkel sei bei C. Da die Summe der Innenwinkel im Dreieck 180° ergibt, gilt $\beta = 90° - \alpha$.
Es gilt weiter $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$.
Mit $\beta = 90° - \alpha$ folgt schon $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$.
b) Sei ABC ein standardmäßig bezeichnetes Dreieck. Der 90° Winkel sei bei C.
Dann gilt: $\left(\sin(\alpha)\right)^2 + \left(\cos(\alpha)\right)^2 = \frac{(a)^2}{c^2} + \frac{(b)^2}{c^2} = \frac{(a)^2 + (b)^2}{c^2}$.
Da wegen des Satz des Pythagoras $(a)^2 + (b)^2 = c^2$ gilt, ist $\frac{(a)^2 + (b)^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$.
c) Sei ABC ein standardmäßig bezeichnetes Dreieck. Der 90° Winkel sei bei C.
Dann gilt $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{\frac{b}{c}} = \sin(\alpha) \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

53

4. a) $\cos(\alpha) = \frac{|OA|}{1} = |OA|$

$\sin(\alpha) = \frac{|AP|}{1} = |AP|$

$\tan(\alpha) = \frac{|AP|}{|OA|} = \frac{|TQ|}{1} = |TQ|$, das gilt, weil zwei ähnliche Dreiecke vorliegen und somit die Strahlensätze gelten.

b) Die Bezeichnung Tangens kommt daher, dass Strecke |TQ| den Kreis im Punkt $(0\,|\,1)$ tangiert.

5.

a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**
0,276	0,914	0,781	0,763	0,779	2,539
0,961	0,407	0,616	0,647	0,627	0,930
0,287	0,445	0,788	1,179	1,244	0,367

6. a) $\tan(89°) = 57{,}29$

$\tan(89{,}9°) = 572{,}9$

...

$\tan(89{,}999999°) = 57\,295\,780$

$\sin(89°) = 0{,}999...$ $\qquad$ $\cos(89°) = 0{,}01745$

$\sin(89{,}9°) = 0{,}999...$ $\qquad$ $\cos(89{,}9°) = 0{,}001745$

... $\qquad$ ...

$\sin(89{,}999999°) = 0{,}999...$ $\qquad$ $\cos(89{,}999999°) = 1{,}745 \cdot 10^{-8}$

Der Tangens bzw. der Kosinus werden je Stufe um eine Zehnerpotenz größer bzw. kleiner.

b)

α	1°	0,1°	...	0,0001°
$\tan(\alpha)$	$1{,}745 \cdot 10^{-2}$	$1{,}745 \cdot 10^{-3}$	...	$1{,}745 \cdot 10^{-6}$
$\sin(\alpha)$	$1{,}745 \cdot 10^{-2}$	$1{,}745 \cdot 10^{-3}$	...	$1{,}745 \cdot 10^{-6}$
$\cos(\alpha)$	0,999 ...	0,999 ...	...	0,999 ...

Der Tangens und der Sinus werden je Stufe um eine Zehnerpotenz kleiner.

c)

α	1°	0,9°	0,8°	0,7°
$\sin(\alpha)$	$1{,}74 \cdot 10^{-2}$	$1{,}57 \cdot 10^{-2}$	$1{,}39 \cdot 10^{-2}$	$1{,}22 \cdot 10^{-2}$
$\tan(\alpha)$	$1{,}74 \cdot 10^{-2}$	$1{,}57 \cdot 10^{-2}$	$1{,}39 \cdot 10^{-2}$	$1{,}22 \cdot 10^{-2}$

Sinus und Tangens sind für die kleinen Winkel fast gleich groß.
Begründung: Da bei kleinem Winkel $\overline{OQ}$ und $\overline{OT}$ fast parallel verlaufen, sind $\overline{AP}$ und $\overline{TQ}$ fast gleich groß. (Siehe Abbildung des Einheitskreises in Aufgabe 4, Seite 139 des Schülerbandes.)

7. (1) $\sin(30° + 40°) = 0{,}94 < \sin(30°) + \sin(40°) = 1{,}14$

(2) $\cos(30° + 40°) = 0{,}34 < \cos(30°) + \cos(40°) = 1{,}63$

(3) $\tan(30° + 40°) = 2{,}75 > \tan(30°) + \tan(40°) = 1{,}42$

2.3 Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken

54

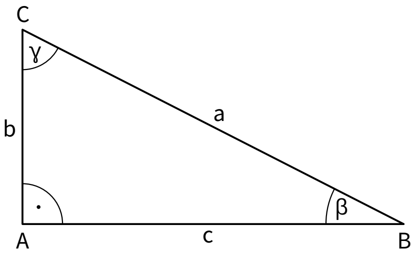
Einstieg:
$h = \sin(55°) \cdot 40\,m \approx 32{,}8\,m$ (Befestigungshöhe)
$s = \cos(55°) \cdot 40\,m \approx 22{,}9\,m$ (Entfernung vom Mast)

55

2. a) $h = \tan(\alpha) \cdot 75\,m + 1 = 59{,}6\,m$ **b)** $\alpha = 26{,}0°$

3. a) 5,7 cm **b)** 7,0 cm **c)** 48,6° **d)** 48,9°

4.



a) $b \approx 11{,}2\,cm$
$\gamma \approx 27{,}7°$
$\beta \approx 62{,}3°$

b) $c \approx 11{,}7\,cm$
$\beta \approx 33{,}6°$
$\gamma \approx 56{,}4°$

c) $a \approx 27{,}0\,cm$
$\gamma \approx 39{,}0°$
$\beta \approx 51{,}0°$

Das kann ich noch!
A) 1) 7 **2)** 6 **3)** 1 **4)** 3

56

5. a) 8,0° **b)** 98 m **c)** 45° **d) (1)** 173 % **(2)** 1 143 %

6. a) 0,27 m
b) Neigung ist mit 5,9 % im vorgeschriebenen Rahmen.
c) 0,36 m

7. (1) Dominik hat falsch umgeformt: $c = \frac{7\,cm}{\sin(27°)} \approx 15{,}4\,cm$
(2) Dominik hat Sinus und Kosinus verwechselt. Richtig ist:
$\sin(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{3\,cm}{5\,cm} = 0{,}6$, also $\beta \approx 36{,}9°$
(3) Dominik hat die Größe des Winkels falsch berechnet:
$\tan(\delta) = 2{,}5$, also $\delta \approx 68{,}2°$.

8. a) 5,9 cm **b)** 33,7° **c)** 4,5 cm **d)** 31,4°

9. a) 6,8°; 5,7°; 7,4°; 6,3° **b)** 144 m; 120 m; 156 m; 132 m

57 **10. a)** b ≈ 15,5 cm, α ≈ 52,6°, β ≈ 37,4°
b) a ≈ 28,0 cm, β ≈ 55,2°, γ ≈ 34,8°
c) c ≈ 7,1 cm, α ≈ 37°, β ≈ 53°
d) α = 23°, b ≈ 13,0 cm, c ≈ 14,1 cm
e) β = 39°, b ≈ 22,2 cm, c ≈ 35,3 cm

11. α ≈ 36,9°

12. a) 1,2 % **b)** 2,4 % **c)** 3,7 %

13. 4°; 105 m 15,6°; 420 m 36,9°; 1125 m 42,0°; 1350 m

14. (1) Gib den Neigungswinkel der Flugbahn an.
Antwort: α ≈ 0,82°
(2) Gib das Gefälle der Flugbahn in Prozent an.
Antwort: p % ≈ 1,4 %
(3) Wie weit fliegt das Segelflugzeug, wenn es mit der Seilwinde [im Schleppflug] auf die maximal mögliche Höhe gebracht wird?
Antwort: 35 km [84 km]

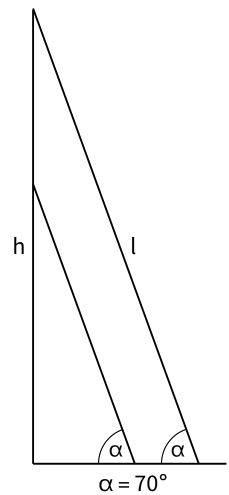
15. a) Wie viel Sprossen muss die Leiter haben, wenn die Arbeitshöhe 4,50 m beträgt? *Antwort:* Mindestens 12 Sprossen.

b)

Anzahl der Sprossen	9	12	15		18	–
Länge der Leiter (l)	2,65	3,50	4,35		5,20	5,30
(1) erreichte Höhe (h)	2,49	3,29	4,09		4,89	4,98
(2) erreichbare Arbeitshöhe	3,84	4,64	5,44	6,24	6,33	

(1) Die Länge der Leiter ist proportional zur erreichten Höhe $\left(\frac{h}{l} = \sin(70°)\right)$

(2) Die Länge der Leiter ist nicht proportional zur erreichbaren Höhe, denn z. B. ist $\frac{3{,}84}{2{,}65} \neq \frac{6{,}33}{5{,}30}$.



16. $|BC| = |AB| \cdot \tan(52{,}3°) \approx 15{,}5$ m

58 **17.** α ≈ 5,2°

18. Entfernung: 111,7 m

19. a) **(1)** 35,3° **(2)** 54,7°
b) 109,5 °

58

20. **a)** 26,3°; 63,7° (für a, b)
35,4°; 54,6° (für b, c)
55,2°; 34,8° (für c, a)

b) 58,1° (für d, c)
40,4° (für d, a)
67,9° (für d, b)

c) 31,9°
49,6°
22,1°

d) 135,8°

21. Der Sinkflug beginnt **(1)** normalerweise 114 km bis 190 km und
(2) spätestens 57 km vor dem Landeplatz.

22. Berechne die durchschnittliche Steigung im 1. Abschnitt [2. Abschnitt; insgesamt] der Niesenbahn. Antwort: 52,1 % [54,8 %; 53,2 %]

2.4 Berechnungen in gleichschenkligen Dreiecken

59

1. $\alpha = \beta \approx 69{,}6°$ $\quad\gamma \approx 40{,}9°$

60

2. **a)** $a = b \approx 21{,}3\,m$
$\alpha = \beta \approx 54°$
$h_c \approx 17{,}2\,m$
$A \approx 215{,}1\,m^2$

b) $a = b \approx 36{,}2\,cm$
$\alpha = 62°$
$\gamma = 56°$
$h \approx 32{,}0\,cm$
$A \approx 543{,}5\,cm^2$

c) $a = 112{,}4\,cm$
$c \approx 186{,}4\,cm$
$\alpha = 34°$
$\gamma = 112°$
$h \approx 62{,}9\,cm$
$A \approx 5\,856{,}9\,cm^2$

3.

a)	b)	c)	d)
$a \approx 4{,}3\,cm$	$f \approx 7{,}9\,mm$	$e \approx 9{,}1\,km$	$a = 2{,}9\,m$
$A = 17{,}5\,cm^2$	$A \approx 35{,}7\,mm^2$	$A \approx 14{,}1\,km^2$	$A = 7{,}76\,m^2$
$u \approx 17{,}2\,cm$	$u = 24\,mm$	$u = 19{,}2\,km$	$u \approx 11{,}5\,m$
$\alpha \approx 108{,}9°$	$\alpha \approx 82{,}8°$	$\alpha \approx 37{,}7°$	$\alpha \approx 70{,}1°$
$\beta \approx 71{,}1°$	$\beta \approx 97{,}2°$	$\beta \approx 142{,}3°$	$\beta \approx 109{,}9°$

4. $|AD| = 5\,cm$; $\quad |BC| = |CD| \approx 7{,}2\,cm$

5. $|AB| = \sqrt{\frac{4\cdot A}{\tan\alpha}} \approx 4{,}6\,cm$

6. **(1)** Wie groß ist die Dachneigung? *Antwort:* 29,9°
(2) Wie hoch ist der Dachboden an der höchsten Stelle? *Antwort:* 3,0 m

7. $\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{d}{r}$; $\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{s}{2r}$

a) $d = \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot r \approx 5{,}5\,cm$

$s = 2\cdot\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot r \approx 7{,}0\,cm$

b) $d = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} \approx 6{,}7\,cm$

$\varepsilon = 2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{s}{2r}\right) \approx 83{,}6°$

c) $r = \sqrt{\frac{1}{4}s^2 + d^2} \approx 1{,}9\,cm$

$\varepsilon = 2\cdot\tan^{-1}\left(\frac{s}{2d}\right) \approx 83{,}5°$

d) $s = 2\cdot\sqrt{r^2 - d^2} \approx 7{,}3\,cm$

$\varepsilon = 2\cdot\cos^{-1}\left(\frac{d}{r}\right) \approx 94{,}3°$

e) $r = \frac{s}{2\cdot\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \approx 4{,}0\,cm$

$d = \frac{s}{2\cdot\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \approx 2{,}1\,cm$

60 **8.** **a)** ABM ist ein gleichseitiges Dreieck; $\varepsilon = 60°$

b) $r_a = a = 3\,cm$

c) $\rho = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,cm$

d) $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}(a)^2 = \frac{27}{2}\sqrt{3}\,cm^2$

2.5 Berechnungen in beliebigen Dreiecken

2.5.1 Sinussatz

61 **Einstieg:**

a) $c = \frac{8\,sm}{\sin(180° - 41° - 57°)} \cdot \sin(41°) = 5{,}3\,sm$

Das Schiff hat einen Abstand von 5,3 sm zum Leuchtturm.

b) $b = \frac{5\,sm}{\sin(180° - (180° - 72°) - 47°)} \cdot \sin(180° - 72°) = 11{,}25\,sm$

Anfangs war der Abstand 11,25 sm.

65 **3.** Damit der Sinussatz im rechtwinkligen Dreieck gilt, muss gelten $\sin(90°) = 1$.

4. **a)** $|FD| \approx 31{,}6\,km$; $|FE| \approx 27{,}3\,km$ **b)** $a \approx 11{,}1\,cm$; $b \approx 6{,}1\,cm$

5. **a)** **(1)** 0,891 **(3)** 0,996 **(5)** 0,218

(2) 0,087 **(4)** 0,602 **(6)** 0,986

b) **(1)** 84,0° **(2)** 36,7° **(3)** 47,6° **(4)** 13,6°

6. **a)** $\gamma = 75°$; $b \approx 3{,}9\,cm$; $c \approx 7{,}3\,cm$

b) $\gamma = 67°$; $a \approx 7{,}2\,cm$; $b \approx 8{,}0\,cm$

c) $\gamma = 54°$; $a \approx 99{,}9\,cm$; $c \approx 84{,}5\,cm$

d) $\alpha = 118°$; $b \approx 19{,}6\,m$; $c \approx 44{,}1\,m$

e) $c \approx 46{,}5\,m$; $\beta = 60°$; $\gamma \approx 39°$

f) $a \approx 13{,}0\,m$; $\alpha \approx 78{,}5°$; $\beta \approx 64{,}5°$

g) $b \approx 2{,}8\,m$; $\alpha \approx 20{,}4°$; $\beta \approx 61{,}6°$

h) $c \approx 11{,}2\,cm$; $\alpha \approx 36{,}7°$; $\gamma \approx 20{,}3°$

7. Falsch umgestellt, richtig ist:

$\frac{7\,cm}{\sin(\varepsilon)} = \frac{5\,cm}{\sin(23°)}$

$\sin(\varepsilon) = \frac{7\,cm \cdot \sin(23°)}{5\,cm} = 0{,}5470$

$\varepsilon = 33{,}2°$