1. Potenzen

9 **Einstiegsseite:**

➔ $40\,000\,\text{km} = 40\,000\,000\,\text{m} = 4 \cdot 10^7\,\text{m}$

➔ 150 Millionen $\text{km} = 150\,000\,000\,\text{km} = 15 \cdot 10^7\,\text{km} = 1{,}5 \cdot 10^8\,\text{km}$

➔ $0{,}06\,\text{nm} = \frac{6}{100\,000\,000\,000}\,\text{m} = \frac{6}{10^{11}}\,\text{m} = \frac{6}{100\,000\,000}\,\text{km} = \frac{6}{10^8}\,\text{km}$

Lernfeld: Mit „… hoch …“ hoch hinaus

10 Weitgehend eigenständig entdecken die Schülerinnen und Schüler die Potenzgesetze durch zielgerichtetes Experimentieren mit oder ohne Rechnerhilfe. Sie üben sich dabei im mathematischen Argumentieren, entwickeln eigenständig Problemlösestrategien und vertiefen ihre Erfahrungen im Umgang mit formalen Darstellungen in der Algebra.
Die Aufgabenstellungen ermöglichen Eigenaktivitäten und Kommunikation. In Partnerarbeit festigen die Schülerinnen und Schüler das erworbene Wissen. Sie schärfen in der direkten Auseinandersetzung mit dem Partner das Überprüfen von Lösungstrategien und mathematische Argumentationsketten.

1. Auftrag: Rasantes Wachstum

Die 1 dm^2 große Fläche mit Wasserlinsen vervierfacht sich jeden Woche.

➔ Größe nach 1 Woche: $4\,\text{dm}^2$
Größe nach 2 Wochen: $16\,\text{dm}^2$
Größe nach 3 Wochen: $64\,\text{dm}^2$
Größe nach 4 Wochen: $256\,\text{dm}^2$
Größe nach 5 Wochen: $1\,024\,\text{dm}^2$
Größe nach 6 Wochen: $4\,096\,\text{dm}^2$
Größe nach 7 Wochen: $16\,384\,\text{dm}^2$
Größe nach 8 Wochen: $65\,536\,\text{dm}^2$
Größe nach 9 Wochen: $262\,144\,\text{dm}^2$
Größe nach 10 Wochen: $1\,048\,576\,\text{dm}^2$

10

1. Auftrag: Fortsetzung

➜ Größe vor 1 Woche:	$\frac{1}{4}\,dm^2 = 0{,}25\,dm^2 = 25\,cm^2$
Größe vor 2 Wochen:	$\frac{1}{16}\,dm^2 = 0{,}0625\,dm^2 = 6{,}25\,cm^2$
Größe vor 3 Wochen:	$\frac{1}{64}\,dm^2 = 0{,}015625\,dm^2 \approx 1{,}56\,cm^2$
Größe vor 4 Wochen:	$\frac{1}{256}\,dm^2 \approx 0{,}00390625\,dm^2 \approx 39{,}06\,mm^2$
Größe vor 5 Wochen:	$\frac{1}{1\,024}\,dm^2 \approx 0{,}0009765625\,dm^2 \approx 9{,}77\,mm^2$
Größe vor 6 Wochen:	$\frac{1}{4\,096}\,dm^2 \approx 0{,}0002441406\,dm^2 \approx 2{,}44\,mm^2$
Größe vor 7 Wochen:	$\frac{1}{16\,384}\,dm^2 \approx 0{,}0000610352\,dm^2 \approx 0{,}61\,mm^2$
Größe vor 8 Wochen:	$\frac{1}{65\,536}\,dm^2 \approx 0{,}0000152588\,dm^2 \approx 0{,}15\,mm^2$
Größe vor 9 Wochen:	$\frac{1}{262\,144}\,dm^2 \approx 0{,}0000038147\,dm^2 \approx 0{,}04\,mm^2$
Größe vor 10 Wochen:	$\frac{1}{21\,048\,576}\,dm^2 \approx 0{,}0000009537\,dm^2 \approx 0{,}01\,mm^2$
➜ In 2 Wochen:	$4^2 = 16$
In einem Monat (30 Tage):	$4^{\frac{30}{7}} \approx 300$
In einem Jahr:	$4^{12} = 16\,777\,216$
➜ An einem Tag $\left(\frac{1}{7}\text{ Woche}\right)$:	$4^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{4} \approx 1{,}22$

2. Auftrag: Zweimal hoch, was ergibt das?
Die Schülerinnen und Schüler begründen die vorgegebene Vereinfachung mithilfe der Definition für Potenzen mit gleicher Basis und mit natürlichem Exponenten. Sie verändern die Exponenten, wenden die Definition an und argumentieren analog. Durch Generalisieren und Verallgemeinern gelangen sie zu der Formel für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis und mit natürlichem Exponenten. Entsprechende Überlegungen führen zu der Formel für die Division von Potenzen mit gleicher Basis und mit natürlichem Exponenten sowie zu der Erkenntnis, dass es keine Gesetze für die Addition und Subtraktion gibt, da eine Vereinfachung nicht möglich ist.
Die Verfügbarkeit eines CAS verändert die Blickrichtung der Argumentation, da der Rechner das Ergebnis vorgibt und diese somit nicht mehr über die direkte Anwendung der Definition von dem Lernenden selbst gefunden wird.

➜ Die Notizen von Mehmed liefern sowohl einen Ausgangspunkt für eine Vermutung für das Potenzgesetz zum Multiplizieren von Potenzen mit gleicher Basis als auch für eine Begründung.
Man multipliziert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten addiert. Die Basis bleibt erhalten.

10 **2. Auftrag:** Fortsetzung

➜ Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass es für das Addieren und Subtrahieren von Potenzen keine einfachen Regeln gibt. Beim Dividieren von Potenzen kann sowohl der Fall gleicher Exponenten als auch der Fall gleicher Basen untersucht werden.
Man multipliziert Potenzen mit gleichem Exponenten, indem man die Basen multipliziert. Der Exponent bleibt erhalten.
Man potenziert eine Potenz, indem man die Exponenten multipliziert. Die Basis bleibt erhalten.
Eine Summe oder Differenz kann man vereinfachen, wenn dabei gleichartige Glieder zusammengefasst werden.
Man dividiert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten subtrahiert. Die Basis bleibt erhalten.
Man dividiert Potenzen mit gleichem Exponenten, indem man die Basen dividiert. Der Exponent bleibt erhalten.

➜ Das Experimentieren mit einem Computer-Algebra-System bietet sich an dieser Stelle an, das man sehr leicht Vermutungen gewinnen und überprüfen kann. Die Beweisnotwendigkeit kann dennoch durch die Frage nach dem Vorgehen des CAS erzeugt werden.

1.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

11 **Einstieg:**

a)

Zeit (in h)	1	2	3	4	5	6	…
Größe (in cm²)	$3 = 3^1$	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	$81 = 3^4$	3^5	3^6	…

$\cdot 3 \quad \cdot 3 \quad \cdot 3 \quad \cdot 3 \quad \cdot 3$ …

b)

Zeit (in h)	−1	−2	−3	−4	−5	−6	…
Größe (in cm²)	$\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$	$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4}$	$\frac{1}{3^5}$	$\frac{1}{3^6}$	…

$:3 \quad :3 \quad :3 \quad :3 \quad :3$ …

c) t: Anzahl der vergangenen Stunden
y: Größe der Kultur (in cm²)
$y = 3^t$

14 **2.** **a)** 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1 024
b) 1; 3; 9; 27; 81; 243; 729
c) 1; 5; 25; 125; 625; 3 125
d) 1; −2; 4; −8; 16; −32; 64; −128; 256; −512; 1 024
e) $\frac{1}{1} = 1$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{128}$; $\frac{1}{256}$; $\frac{1}{512}$; $\frac{1}{1024}$
f) 1; $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; $4\sqrt{2}$; 8

14

3. **a)** $2^4 < 2^5$ **b)** $2^4 < 3^4$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4$ **d)** $2^4 = 4^2$ **e)** $3^0 = 7^0$

4. **a)** $2+2+2+2+2 < 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$
b) $5+5 < 5\cdot 5$
c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
d) $(-3)+(-3)+(-3)+(-3) < (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)$

5. **a)** $8 < 9$ **c)** $625 > -625$ **e)** $-8 = -8$
b) $-125 < 125$ **d)** $4 > -4$ **f)** $2^6 = 6^4 < 256 = 2^8$

6. **a)** 1 000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001
b) 27; 9; 3; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$
c) 125; 25; 5; 1; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{125}$
d) −64; 16; −4; 1; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; $-\frac{1}{64}$
e) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8

7. –

8. **a)** $16 > -16$ **c)** $1 > -1$ **e)** $64 < 256$
b) $-64 = -64$ **d)** $10\,000 > -10\,000$ **f)** $-8 < 9$

9. **a)** $\frac{1}{8}$; −8; −8; $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{1}{25}$; −25; 25; $\frac{1}{25}$; $-\frac{1}{25}$

10. a^n ist negativ, wenn $a < 0$ und n ungerade ist.
In den anderen Fällen ist a^n positiv $(a \neq 0)$.

15

11. Es gibt die Ausnahmen $a^0 = 1$ und $a^1 = a$. Das sind keine Produkte aus gleichen Faktoren.

12. $0^0 = 1$
Der Graph zu $y = x^0$ ist für $x < 0$ und $x > 0$ identisch mit dem Graphen zu $y = 1$. Daher ist auch für $x = 0$ die Definition $0^0 = 1$ sinnvoll, denn dann ist der Funktionswert 1 und der zugehörige Punkt liegt auch auf dem Graphen von $y = 1$.

13. **a)** Falsch, da $-5^{-2} = -\frac{1}{25}$ **d)** Falsch, da $8 > \frac{1}{8}$ **g)** Richtig, da $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$
b) Richtig, da $\frac{1}{16} < \frac{1}{8}$ **e)** Falsch, da $\frac{16}{9} > -\frac{16}{9}$ **h)** Richtig, da $\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$
c) Richtig, da $0{,}1 = \frac{1}{10}$ **f)** Richtig, da $1 > -\frac{1}{27}$ **i)** Richtig, da $-\frac{1}{2\sqrt{2}} < 0$

14 Patrick muss Klammern setzen, da sonst das Minuszeichen vor der Potenz steht und nicht potenziert wird: $(-47)^4 = 4\,879\,681$

15

15. **a)** 1,331

b) $\frac{81}{625} = 0{,}1296$

c) $\frac{1}{4^{10}} \approx 0{,}0000009537$

d) 1

e) $-\frac{8}{27} = -0{,}296296$

f) $\frac{1}{(-3{,}4)^7} \approx -0{,}00019039$

g) 2 401

h) 0,00000001

i) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \approx 7{,}59375$

j) 1

k) $\frac{1}{4} = 0{,}25$

l) $\frac{1}{(\sqrt{3})^9} \approx 0{,}007128$

m) 0,8170728…

n) 1,22019…

o) $\frac{1}{(4 \cdot \sqrt{5})^5} \approx 0{,}00001747$

16. Druckfehler in der 1. Auflage:
Die Teilaufgaben sind falsch nummeriert.

a) $8^2 = 4^3 = 2^6 = (-8)^2 = (-2)^6$
b) $(-5)^3 = -5^3$
c) $16^{-1} = 4^{-2} = 2^{-4} = (-2)^{-4} = (-4)^{-2}$
d) $25^2 = 5^4 = (-25)^2 = (-5)^4$
e) $16^2 = 4^4 = 2^8 = (-16)^2 = (-4)^4 = (-2)^8$
f) $25^{-1} = 5^{-2} = (-5)^{-2}$
g) $20^2 = (-20)^2$
h) $100^2 = 10^4 = (-100)^2 = (-10)^4$
i) $64^{-1} = 8^{-2} = 4^{-3} = 2^{-6} = (-8)^{-2} = (-2)^{-6}$
j) $\left(\frac{1}{16}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(-\frac{1}{16}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^8$
k) $\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^4$
l) $900^{-1} = 30^{-2} = (-30)^{-2}$
m) $\left(\frac{2}{5}\right)^5$
n) $0{,}5^3$
o) $1\,600^{-1} = 40^{-2} = (-40)^{-2}$
p) *Beispiele*: $1^7 = 3^0 = 17^0 = 0^0 = (-1)^8 = (-4)^0$
q) $2{,}5^2 = (-2{,}5)^2$
r) $40\,000^{-1} = 200^{-2} = (-200)^{-2}$

17. **a)** Richtig, denn wenn n gerade ist, dann ist $a^n > 0$ also auch $\frac{1}{a^n} > 0$.
b) Falsch, Gegenbeispiel: $2^{-3} = \frac{1}{8} > 0$ mit n ungerade.
c) Richtig, wenn ein Bruch größer als 1 ist, dann ist der Kehrwert des Bruches kleiner als 1.
d) Richtig, denn der Kehrbruch eines Bruches $\frac{1}{a}$ mit $0 < \frac{1}{a} < 1$ ist größer als 1.
e) Richtig, wenn ein Bruch kleiner als 1 und größer als 0 ist, dann ist der Kehrwert des Bruches größer als 1.
f) Falsch, Gegenbeispiel: $(-2)^3 = -8 < 0$ mit n ungerade.

18. 9^9 [$9^{(9^9)}$]

15

19.

Zeit (in Wochen)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Masse (in mg)	256	128	64	32	16	8	4	2	1	0,5	…

Allgemein gilt für die Masse m (in mg) und die Zeit t (in Wochen): $m = 512 \cdot 0{,}5^t$

16

20. Die n-te Figur enthält 2^{n-1} Punkte, die 12. Figur enthält also $2^{11} = 2\,048$ Punkte.

21. Der grün gefärbte Anteil im n-ten Quadrat ist $\frac{1}{2^{n-1}}$.
Der Anteil im 10. Quadrat beträgt also: $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} = 2^{-9}$

22. **a)** $x \neq 0$ **b)** $z \neq 0$ **c)** $z \neq -1$ **d)** $a \neq 0$ und $b \neq 0$ **e)** $a \neq -2$ und $b \neq 0$

23. **a)** $\frac{1}{(2a)^3}$ **b)** $\frac{1}{(3ab)^4}$ **c)** $\frac{1}{5x}$ **d)** x^4 **e)** $\frac{1}{(a+b)^5}$ **f)** $1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$ **g)** $\frac{a}{(x+y)^2}$ **h)** $a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$ **i)** $\frac{y}{x^2}$

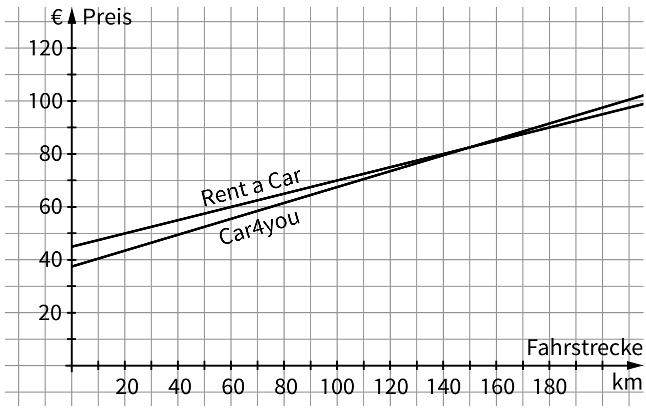
24. **a)** x^{-1} **b)** $(a \cdot b)^{-3}$ **c)** $(\sqrt{a})^{-3}$ **d)** $a \cdot c^{-5}$ **e)** $x^3 \cdot (4y)^{-1}$ **f)** $(a+b)^{-2}$ **g)** $(1+z)^{-1}$ **h)** x^3 **i)** $4y^4$ **j)** $x^{-4} \cdot y^{-1}$ **k)** $(x-y)^{-2} \cdot (x+y)^3$ **l)** $y^2 \cdot z^3$

Das kann ich noch!

A) **1)** Fahrstrecke x (in km), Preis y (in €)
Rent a Car: $y = 0{,}25x + 45{,}00$ Car4you: $y = 0{,}30x + 37{,}50$

2) Rent a Car: $y = 0{,}25 \cdot 120 + 45{,}00 = 75{,}00$, also 75,00 €.
Car4you: $y = 0{,}30 \cdot 120 + 37{,}50 = 73{,}50$, also 73,50 €.

3)



4) $0{,}25x + 45{,}00 = 0{,}30x + 37{,}50$; Lösung: $x = 150$
Bei 150 km sind die beiden Tarife gleich günstig. Es sind dann 82,50 € zu zahlen.

1.2 Zahlendarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen

17

1. a) $3{,}507 \cdot 10^3$; $4{,}85 \cdot 10^1$; $1{,}2304 \cdot 10^1$; $7{,}548048 \cdot 10^5$
b) 430; 8 357; 720 000; 37 542,1

2. a) 1 000 000 000 000 km^3
b) 30 300 000 km^2
c) 1 100 000 000 km
d) 940 000 000 km

3. a) $3 \cdot 10^5 \frac{km}{s}$
b) $1{,}39 \cdot 10^6$ km
c) $3{,}84 \cdot 10^5$ km
d) $4{,}16 \cdot 10^7$ km^2
e) $4{,}5 \cdot 10^9$ km
f) $3{,}962 \cdot 10^9$ Jahre

18

4. a) Wenn das Ergebnis zu viele Ziffern hat, verwendet der Taschenrechner die Normdarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen.
b) Meist gibt es eine besondere Taste für die verkürzte Eingabe der Normdarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen (z. B. die Tasten E; EE; Exp, …) bzw. findet die Befehle in einem Untermenü des Rechners.

5. Hier wurde mit 365 Tagen pro Jahr gerechnet, das sind 31 536 000 s.
a) $9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km
b) 500 s = 8 min 20 s
c) $9{,}4608 \cdot 10^{17}$ km
d) $6{,}3 \cdot 10^5$ Jahre

6. a) 1 GB = 2^{30} Byte = 1 073 741 824 Byte (siehe Schülerband Seite 14).
222 627 688 448 Byte ≈ 207,338 GB ≈ 207 GB
777 574 350 848 Byte ≈ 207,338 GB ≈ 207 GB
b) 1 kB = 2^{10} Byte; 671 088,64, also gut 671 000 Briefe.
c) 1 MB = 2^{20} Byte, 1 GB = 2^{30} Byte, 1 TB = 2^{40} Byte
(1) 1 780,87, also 1 780 Bilder
(2) 227 951,3, also 227 951 Bilder

7. a) $1 \cdot 10^{-2}$
b) $7 \cdot 10^{-2}$
c) $6{,}8 \cdot 10^{-1}$
d) $4{,}9 \cdot 10^{-3}$
e) $3{,}9 \cdot 10^{-5}$

8. a) 0,03
b) 0,00042
c) 0,0000075
d) 0,0000253
e) 0,000003

19

9. (1) 0,0007 cm
(2) 0,000094 cm
(4) 0,000086 m
(3) 0,00025 m
(5) 0,0055 g

10. a) Wenn das Ergebnis zu viele Ziffern hat, verwendet der Taschenrechner die Normdarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen.
b) Meist gibt es eine besondere Taste für die verkürzte Eingabe der Normdarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen (z. B. die Tasten E; EE; Exp, …) bzw. findet die Befehle in einem Untermenü des Rechners.

11. a) 3 g
b) $2 \cdot 10^{-5}$ kg
c) $5 \cdot 10^{-7}$ mm
d) $3{,}2 \cdot 10^{-6}$ m

19

12. a) (1) 10^{-6} m = 1 Mikrometer
(2) 10^{-7} m = 100 Nanometer
(3) 10^{-9} m = 1 Nanometer
(4) 10^{-6} m = 1 Mikrometer
(5) 10^{-6} m = 1 Mikrometer

b) (1) $\frac{m}{s}$ ist eine Einheit für die Geschwindigkeit.
(2) $\frac{km}{h}$ ist eine Einheit für die Geschwindigkeit.
(3) $\frac{g}{cm^3}$ ist eine Einheit für die Dichte.
(4) $\frac{N}{m^2}$ ist eine Einheit für den Druck.
(5) $\frac{N}{m}$ ist eine Einheit für die Oberflächenspannung.

13. –

14. Abhängig vom Taschenrechner, z. B.: $9{,}99 \cdot 10^{-99}$ [$9{,}99 \cdot 10^{99}$]

15. a) 0,01 m = 1 cm Zum Beispiel eine Murmel.
b) 9 990 kg

1.3 Potenzen mit rationalen Exponenten

1.3.1 Potenzen mit Stammbrüchen als Exponenten – n-te Wurzeln

20

Einstieg:
a) 5 cm b) Ungefähr 5,85 cm

22

2. Druckfehler in der ersten Auflage in Teilaufgabe b) (1): Potenziere jedes Ergebnis mit 4.

a) (1)

8	2	8
27	3	27
512	8	512
729	9	729
1 331	11	1 331

(2)

5	125	5
6	216	6
12	1 728	12
20	8 000	20
30	27 000	30

Die linke und die rechte Spalte der Tabellen stimmen jeweils überein.

b) (1) $\sqrt[4]{625} = 5$; $5^4 = 625$
$\sqrt[4]{1296} = 6$; $6^4 = 1296$
$\sqrt[4]{10\,000} = 10$; $10^4 = 10\,000$

(2) $8^4 = 4096$; $\sqrt[4]{4096} = 8$
$11^4 = 14\,641$; $\sqrt[4]{14\,641} = 11$
$4^4 = 256$; $\sqrt[4]{256} = 4$

c) 125; 4 913; 7; 2; 19; 74

23

3. a) *Beweis:* Der Bruch $\frac{m}{n}$ sei gekürzt.
$\frac{m}{n} = \sqrt[3]{2}$ bedeutet $\frac{m^3}{n^3} = 2 = \frac{2}{1}$. Wegen $\frac{m}{n}$ ist auch $\frac{m^3}{n^3}$ ein gekürzter Bruch, denn m3 enthält dieselben Primfaktoren wie m. Mit $\frac{m^3}{n^3} = \frac{2}{1}$ müsste $m^3 = 2$ und $n^3 = 1$ sein. Es gibt aber keine natürliche Zahl m, deren 3. Potenz gleich 2 ist und damit keine Bruchzahl $\frac{m}{n}$ mit $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{2}$, d. h. $\sqrt[3]{2}$ ist irrational.

b) $\sqrt[3]{2}$ liegt zwischen 1 und 2, denn $1^3 = 1$ und $2^3 = 8$.

Untere Näherungszahl	Obere Näherungszahl	Mittelwert m	m^3
1	2	1,5	3,375
1	1,5	1,25	1,953125
1,25	1,5	1,375	≈ 2,5996
1,25	1,375	1,3125	≈ 2,2610

$\sqrt[3]{2} \approx 1{,}3$, denn $\sqrt[3]{2}$ liegt zwischen 1,25 und 1,315.
Der Taschenrechner liefert $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}25992105$.

4. a) 2; denn $2^3 = 8$
b) 10; denn $10^3 = 1\,000$
c) 8; denn $8^3 = 512$
d) 2; denn $2^5 = 32$
e) 0,2; denn $0{,}2^3 = 0{,}008$
f) 4; denn $4^4 = 256$
g) 11; denn $11^2 = 121$
h) 0,3; denn $0{,}3^4 = 0{,}0081$
i) 1; denn $1^7 = 1$
j) 0,1; denn $0{,}1^5 = 0{,}00001$
k) 0; denn $0^{12} = 0$
l) $\frac{1}{2}$; denn $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
m) $\frac{2}{3}$; denn $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$
n) $\frac{3}{2}$; denn $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$
o) $\frac{3}{4}$; denn $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

5. a) $\sqrt{25} = 5$
b) $\sqrt[3]{512} = 8$
c) wahr
d) wahr
e) $\sqrt[5]{3\,200\,000} = 20$
f) $\sqrt[6]{0{,}000001} = 0{,}1$
g) wahr
h) wahr

23

6. a) $\sqrt[3]{10}$ liegt zwischen 2 und 3, denn $2^3 = 8$ und $3^3 = 27$.

Untere Näherungszahl	Obere Näherungszahl	Mittelwert m	m^3
2	3	2,5	15,625
2	2,5	2,25	11,390625
2	2,25	2,125	≈ 9,5957
2,125	2,25	2,1875	≈ 10,4675
2,125	2,1875	2,15625	≈ 10,0253
2,125	2,15625	2,140625	≈ 9,8089
2,140625	2,15625	2,1484375	≈ 9,9167
2,1484375	2,15625	2,15234375	≈ 9,9709

$\sqrt[3]{10} \approx 2.2\$$, denn $\sqrt[3]{10}$ liegt zwischen 2,15234375 und 2,15625.

Der Taschenrechner liefert $\sqrt[3]{10} \approx 2.15443469$.

b) $\sqrt[4]{100}$ liegt zwischen 3 und 4, denn $3^4 = 81$ und $4^4 = 256$.

Untere Näherungszahl	Obere Näherungszahl	Mittelwert m	m^4
3	4	3,5	150,0625
3	3,5	3,25	≈ 111,5664
3	3,25	3,125	≈ 95,3674
3,125	3,25	3,1875	≈ 103,2288
3,125	3,1875	3,15625	≈ 99,2397

$\sqrt[4]{100} \approx 3{,}2$, denn $\sqrt[4]{100}$ liegt zwischen 3,15625 und 3,1875.

Der Taschenrechner liefert $\sqrt[4]{100} \approx 3{,}16227766$.

c) $\sqrt[3]{480}$ liegt zwischen 7 und 8, denn $7^3 = 343$ und $8^3 = 512$.

Untere Näherungszahl	Obere Näherungszahl	Mittelwert m	m^3
7	8	7,5	421,875
7,5	8	7,75	≈ 465,4844
7,75	8	7,875	≈ 488,3730
7,75	7,875	7,8125	≈ 476,8372
7,8125	7,875	7,84375	≈ 482,5821

$\sqrt[3]{480} \approx 7{,}8$, denn $\sqrt[3]{480}$ liegt zwischen 7,8125 und 7,84375.
Der Taschenrechner liefert $\sqrt[3]{480} \approx 7{,}829735282$.

d) $\sqrt[3]{2000}$ liegt zwischen 12 und 13, denn $12^3 = 1\,728$ und $13^3 = 2\,197$.

Untere Näherungszahl	Obere Näherungszahl	Mittelwert m	m^3
12	13	12,5	1953,125
12,5	13	12,75	≈ 2072,6719
12,5	12,75	12,625	≈ 2012,3066
12,5	12,625	12,5625	≈ 1982,5686

$\sqrt[3]{2000} \approx 12{,}6$, denn $\sqrt[3]{2000}$ liegt zwischen 12,5625 und 12,625.

Der Taschenrechner liefert $\sqrt[3]{2000} \approx 12{,}5992105$.

23 **6. e)** $\sqrt[3]{87{,}6}$ liegt zwischen 4 und 5, denn $4^3 = 64$ und $5^3 = 125$.

Untere Näherungszahl	Obere Näherungszahl	Mittelwert m	m^3
4	5	4,5	91,125
4	4,5	4,25	≈ 76,7656
4,25	4,5	4,375	≈ 83,7402
4,375	4,5	4,4375	≈ 87,3806
4,4375	4,5	4,46875	≈ 89,2397
4,4375	4,46875	4,453125	≈ 88,3069
4,4375	4,453125	4,4453125	≈ 87,8429

$\sqrt[3]{87{,}6} \approx 4{,}4$; denn $\sqrt[3]{87{,}6}$ liegt zwischen 4,4375 und 4,4453125.
Der Taschenrechner liefert $\sqrt[3]{87{,}6} \approx 4{,}441210611$.

7. a) $2 \cdot 4 = 8$ **c)** $\sqrt[5]{32} = 2$ **e)** $1 + 10 = 11$ **g)** $5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 18$
b) $7 - 6 = 1$ **d)** $\sqrt[3]{64} = 4$ **f)** $50 \cdot 0{,}1 - 2 = 3$ **h)** $\frac{1}{7} \cdot 7 - \frac{1}{8} \cdot 8 = 0$

8. a) $6 = 6$; wahr **c)** $4 \neq \sqrt{\sqrt{8}} = 1{,}68\ldots$; falsch
b) $2 = 2$; wahr **d)** $2 = 2$; wahr

9. a) 2 **c)** 2 **e)** 0 **g)** 3
b) 2 **d)** 1 **f)** 5 **h)** $64^{0,\bar{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

10. a) $\sqrt[5]{a}$ **c)** $\sqrt[5]{y}$ **e)** $\sqrt[3]{a+b}$
b) $\sqrt[4]{x}$ **d)** $\sqrt{1+x}$ **f)** $\sqrt[8]{n+1}$

11. –

12. a) 81 **c)** 1,2 **e)** 8
b) 37 **d)** 0 **f)** 4

24 **13. a)** $|c|$; c beliebig **c)** $-|a|$; a beliebig **e)** $|a+b|$; a, b beliebig
b) $2a$; $a \geq 0$ **d)** $1{,}5 \cdot |r|$; r beliebig **f)** $a + b$; $a + b \geq 0$

14. a) 3 **b)** −18 **c)** richtig **d)** $\frac{1}{16}$

15. a) *Beweis:* Der Bruch $\frac{m}{n} = \sqrt[4]{8}$ sei gekürzt, damit auch $\frac{m^4}{n^4}$.
Wegen $\frac{m^4}{n^4} = 8 = \frac{8}{1}$ müsste $m^4 = 8$ sein. Es gibt aber keine natürliche Zahl m, deren 4. Potenz gleich 8 ist. Aus dem Widerspruch folgt, dass die Annahme falsch und $\sqrt[4]{8}$ irrational ist.

b) Aus der Annahme $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{216}$ erhält man keinen Widerspruch, da es eine natürliche Zahl $m = 6$ gibt, sodass $m^3 = 216$ ist.
$\sqrt[3]{216} = 6$ ist nicht irrational.

24

16. a)

n	(1) $\sqrt[n]{500}$	(2) $\sqrt[n]{0{,}01}$
2	22,3607	0,1
3	7,9370	0,2154
4	4,7287	0,3162
5	3,4657	0,3981

$\sqrt[n]{500}$ wird immer kleiner, ist aber immer größer als 1.

$\sqrt[n]{0{,}01}$ wird immer kleiner, ist aber immer größer als 1.

b) (1) $n \geq 9$ (2) $n \geq 7$

17. Für alle a wird der Radikand a^n bei geraden n positiv bzw. 0. Damit ist $\sqrt[n]{a^n}$ immer definiert. Für $a < 0$ ist $\sqrt[n]{a^n} = -a = |a|$. Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a^n} = a = |a|$.
Insgesamt folgt also $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.
Für ungerade n und für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a^n} = a = |a|$.
Für n ungerade und negative a ist a^n auch negativ. Die n-te Wurzel ist also nicht definiert.
Wenn man diese Definition zulässt (vergleiche auch Information auf Seite 21 des Schülerbandes) erhält man:
Für $a < 0$ ist $\sqrt[n]{a^n} = -\sqrt[n]{|a|^n} = -|a| = a \neq |a|$.

1.3.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Einstieg:
Die Größe der Schimmelpilzkultur wächst in einer Stunde um den Faktor 3, in einer halben Stunde um den Faktor a. In einer Stunde, also zweimal einer halben Stunde, um den Faktor $a \cdot a = a^2$. Damit erhalten wir $a^2 = 3$, also $a = \sqrt{3}$.
In einer halben Stunde wächst die Schimmelpilzkultur um den Faktor $\sqrt{3} \approx 1{,}732$.
Die Größe der Schimmelpilzkultur wächst in einer viertel Stunde um den Faktor b. In einer Stunde, also viermal einer viertel Stunde, um den Faktor $b \cdot b \cdot b \cdot b = b^4$.
Damit erhalten wir $b^4 = 3$, also $b = \sqrt[4]{3}$.
In $\frac{5}{4}$ Stunden wächst die Schimmelpilzkultur um den Faktor $\left(\sqrt[4]{3}\right)^5 \approx 3{,}948$.

26

2. $a^{1,5} = a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}} = a^{\frac{15}{10}}$ also $\sqrt[2]{a^3} = \sqrt[10]{a^{15}}$
Beweis des Satzes:
$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ also ist:
(1) $p = b \cdot n$ und $q = b \cdot m$ oder (2) $n = b \cdot p$ und $m = b \cdot q$ mit $b \in \mathbb{N}^*$
Damit folgt:
(1) $\sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{b\cdot m}{b\cdot n}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (2) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{b\cdot q}{b\cdot p}} = a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$

3. Die Hefekultur verdoppelt sich in einer Stunde.
a) Drei drittel Stunden ergeben zusammen eine Stunde.
Wir suchen also einen Vervielfachungsfaktor a mit $a \cdot a \cdot a = a^3 = 2$, also $a = \sqrt[3]{2}$.
b) $1\frac{1}{2}$ Stunden sind die Hälfte von 3 Stunden. In 3 Stunden ist die Hefekultur auf das 2^3-fache angewachsen. Wir suchen also einen Vervielfachungsfaktor a mit $a^2 = 2^3$, also $a = \sqrt{2^3}$.

26

4. **a)** $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[4]{2^3}$; $\sqrt[3]{2^4}$; $\sqrt{3}$

c) $\frac{1}{\sqrt{4}} = \sqrt{4^{-1}}$; $\frac{1}{\sqrt{5^3}} = \sqrt{5^{-3}}$; $\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[5]{2^{-2}}$

d) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3^3}$; $\sqrt[5]{5^{16}}$

5. **a)** $18^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $7^{\frac{1}{5}}$ **b)** $2^{\frac{4}{3}}$; $3^{-\frac{1}{4}}$; $3^{\frac{1}{2}}$ **c)** $4^{-\frac{2}{3}}$; $7^{-\frac{1}{5}}$; $2^{-\frac{3}{4}}$

6. **a)** $\sqrt[3]{x^2}$; $x > 0$

b) $\sqrt[4]{y^3}$; $y > 0$

c) $\sqrt[3]{a}$; $a > 0$

d) $\frac{1}{\sqrt[4]{b^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{b^3}} = \sqrt[4]{b^{-3}}$; $x > 0$

e) $d^{\frac{1}{2}} = \sqrt{d}$; $d > 0$

f) $e^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{e^4}$; $e > 0$

g) $p^{-\frac{26}{5}} = \frac{1}{p^{\frac{26}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{p^{26}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{p^{26}}} = \sqrt[5]{p^{-26}}$; $p > 0$

h) $a^{\frac{36}{5}} = \sqrt[5]{a^{36}}$; $a > 0$

7. **a)** $a^{\frac{5}{3}}$; $x^{\frac{2}{5}}$; $z^{\frac{5}{4}}$

b) $x^{-\frac{1}{4}}$; $z^{-\frac{2}{5}}$; $u^{-\frac{7}{3}}$

c) $x^{-\frac{3}{2}}$; $c^{\frac{4}{3}}$; $k^{\frac{1}{2}}$

d) $z^{-\frac{2}{3}}$; $x^{-\frac{4}{5}}$; $m^{-\frac{3}{2}}$

27

8. **a)** 2 **c)** 8 **e)** 1 **g)** 2 **i)** $\frac{1}{6}$ **k)** $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{6}$ **d)** 4 **f)** 0,5 **h)** 2 **j)** 8 **l)** 8

9. **a)** –

b) **(1)** 1,19581317…
(2) 0,69314484…
(3) 470,533239…
(4) 0,00781497…
(5) 1,21901365…
(6) 6,24025146…
(7) 1,31607401…
(8) 1,71743303…

10. **a)** $3 = 9^{\frac{1}{2}} = 27^{\frac{1}{3}} = 81^{\frac{1}{4}}$

b) $5 = 25^{\frac{1}{2}} = 125^{\frac{1}{3}} = 625^{\frac{1}{4}}$

c) $9 = 81^{\frac{1}{2}} = 729^{\frac{1}{3}} = 6\,561^{\frac{1}{4}}$

d) $4 = 16^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{3}} = 256^{\frac{1}{4}}$

e) $2^3 = 4^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{3}{3}} = 16^{\frac{3}{4}}$

f) $2^6 = 4^{\frac{6}{2}} = 8^{\frac{6}{3}} = 16^{\frac{6}{4}}$

g) $3^9 = 9^{\frac{9}{2}} = 27^{\frac{9}{3}} = 81^{\frac{9}{4}}$

11. **a)** 4 **b)** 25 **c)** 8 **d)** 27 **e)** 32 **f)** 81

12. **a)** $(-5)^{\frac{2}{3}}$ ist nicht definiert; $\sqrt[3]{(-5)^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[5]{(-1)^3} = \sqrt[5]{-1}$ ist nicht definiert

c) richtig

d) $(-10\,000)^{-\frac{1}{4}}$ ist nicht definiert.

13. **a)** $x - 1 > 0$, also $x > 1$

b) $x + 5 > 0$, also $x > -5$

c) $2x - 1 > 0$, also $x > 0{,}5$

d) $3x + 6 > 0$, also $x > -2$

e) $1 - 4x > 0$, also $x < 0{,}25$

f) $40 - 4x > 0$, also $x < 10$

14. **a)** $(x-1)^{\frac{2}{3}}$ **c)** $(x^3 + y^3)^{\frac{1}{2}}$ **e)** $x^{-\frac{1}{4}}$

b) $(a-b)^{\frac{2}{3}}$ **d)** $(a \cdot b)^{\frac{3}{4}}$ **f)** $-7(a-b)^{-n}$

27 **15.** **a)** $\sqrt[3]{(a+1)^2}$ **c)** $\sqrt[4]{(x-7y)^{-3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-7y)^3}}$ **e)** $\sqrt[n]{(a\cdot b)^m}$

b) $\sqrt[9]{(x+y)^4}$ **d)** $\sqrt[7]{(x\cdot y)^4}$ **f)** $\sqrt[n\cdot q]{a^p}$

16. **a)** $\sqrt[4]{a^6} = a^{\frac{6}{4}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{a^3};\;\; a > 0$

b) $\sqrt[9]{x^3} = x^{\frac{3}{9}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x};\;\; x > 0$

c) $\sqrt[10]{z^5} = 7^{\frac{5}{10}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z};\;\; z > 0$

d) $\frac{1}{\sqrt[12]{x^8}} = x^{-\frac{8}{12}} = x^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}};\;\; x > 0$

e) $\sqrt[3k]{x^k} = x^{\frac{k}{3k}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x};\;\; x > 0;\;\; k \in \mathbb{N};\;\; k \neq 0$

f) $\sqrt[2n]{r^{-n}} = r^{-\frac{n}{2n}} = r^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{r-1} = \frac{1}{\sqrt{r}};\;\; x > 0;\;\; n \in \mathbb{N};\;\; n \neq 0$

17. Nach einer Stunde steht das Wasser nur noch $\frac{1}{4}$ so hoch wie vorher.

a) $80\,\text{cm}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 80\,\text{cm}\cdot\frac{1}{16} = 5\,\text{cm}$ **c)** $80\,\text{cm}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 80\,\text{cm}\cdot\frac{1}{2} = 40\,\text{cm}$

b) $80\,\text{cm}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 80\,\text{cm}\cdot 4 = 320\,\text{cm}$ **d)** $80\,\text{cm}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = 80\,\text{cm}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 56{,}6\,\text{cm}$

Im Blickpunkt: Kleine Anteile – große Wirkung

28 **1.** Der Verlauf der Temperatur und der Verlauf der Konzentration des Kohlendioxids ist in der Vergangenheit sehr ähnlich. Bei geringen Temperaturen ist auch die Kohlendioxidkonzentration geringer. Der Wert der CO_2-Konzentration für das Jahr 2007 jedoch ist erheblich höher als man aufgrund der Messungen für die Vergangenheit erwarten würde. Dieser Wert war seit 160 000 Jahren nie so hoch wie heute.

2. 1 ppm = 10^{-6} 1 ppt = 10^{-12}

1 ppb = 10^{-9} 1 ppq = 10^{-15}

29 **3.** **a)** $2{,}7\cdot 10^6\,\text{g} = 2{,}7\,\text{t}$ **c)** $2{,}7\cdot 10^{12}\,\text{g} = 2\,700\,000\,\text{t}$

b) $2{,}7\cdot 10^9\,\text{g} = 2\,700\,\text{t}$ **d)** $2{,}7\cdot 10^{15}\,\text{g} = 2\,700\,000\,000\,\text{t}$

4. **a)** Chemische Verfahren: $\frac{10^{-9}\,\text{g}}{1\,000\,\text{g}} = \frac{1}{10^{12}} = 1$ ppt

Elektrochemische Verfahren: 1 ppq

Spektroskopische Verfahren: 0,1 ppq

b) 1 Liter Wasser, also 1 dm^3 Wasser, wiegt 1 kg.
Harnanteil im Wasser in g pro kg:
$\frac{5}{143\,000\,000} \approx 0{,}000000035 = 3{,}5\cdot 10^{-8} = 35\cdot 10^{-9} = 35$ ppb
Laut den Angaben in Teilaufgabe a) kann dieser Anteil nachgewiesen werden.

5. In einem Liter befinden sich 10^{-5} l Ozon.

29 **6.** In einem Liter Luft sind zwischen 0,00019 l und 0,042 l Wasser enthalten.

1.4 Potenzgesetze ihre Anwendung

1.4.1 Multiplizieren und Potenzieren von Potenzen

30 **Einstieg:**

(1) $3^5 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)\,(3 \cdot 3) = 3^7$

$3^{-5} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{3^5} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3)} = \frac{1}{3^7} = 3^{-7}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(2) $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$

$2^{-4} \cdot 3^{-4} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{1}{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)} = \frac{1}{(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)} = \frac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{6^4} = 6^{-4}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(3) $(3^2)^3 = (3^2) \cdot (3^2) \cdot (3^2) = 3^{2+2+2} = 3^6$

$(3^2)^{-3} = \frac{1}{(3^2) \cdot (3^2) \cdot (3^2)} = \frac{1}{3^{2+2+2}} = \frac{1}{3^6} = 3^{-6}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

32 **3.** $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{12}$

$(3^5)^{-1} = \frac{1}{3^5} = 3^{-5}$

$(4^{-2})^{-3} = \frac{1}{(4^{-2})^3} = \frac{1}{4^{-2} \cdot 4^{-2} \cdot 4^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{4^2}} = \frac{1}{\frac{1}{4^6}} = 4^6$

$\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(4^{\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(4^{\frac{3}{2}}\right) = 4^{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = 4^{\frac{6}{2}} = 4^3$

Allgemeine Begründung für $m,\ n \in \mathbb{N};\ m,\ n > 0$:

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \ldots a^m}_{n \text{ Faktoren } a^m} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m \text{ Faktoren } a}}_{n \cdot m \text{ Faktoren } a} \ldots = a^{m \cdot n}$$

33 **4.** Man kann nur gleichartige Glieder zusammenfassen. Das ist nur bei folgenden Teilaufgaben möglich:

d) $2a^n$ **h)** 0 **i)** $4a^n$ **j)** $6a^n$

5. a) **(1)** Anwendung von P1

(2) Anwendung von P2

(3) Anwendung von P3

b) **(1)** $(\sqrt{a})^5 = (\sqrt{a})^{4+1} = (\sqrt{a})^4 \cdot (\sqrt{a})^1 = a^2 \cdot \sqrt{a}$; für $a \geq 0$

(2) $(a\sqrt{b})^{-2} = a^{-2} \cdot (\sqrt{b})^{-2} = a^{-2} b^{-1}$; für $a \neq 0,\ b > 0$

(3) $(\sqrt{a})^{10} = (\sqrt{a})^{2 \cdot 5} = \left((\sqrt{a})^2\right)^5 = a^5$; für $a \geq 0$

33

6. **a)** $2^5 = 32$
b) $3^9 = 19\,683$
c) $5^5 = 3\,125$
d) $5^{-5} = \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3\,125}$
e) $4^2 = 16$
f) $1^9 = 1$
g) $0^{15} = 1$
h) $10^2 = 100$
i) $(-1)^6 = 1$
j) $(-2)^0 = 1$
k) $(-10)^{-7} = -\frac{1}{10\,000\,000} = -0{,}0000001$
l) $0{,}2^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} = 0{,}0016$
m) $1{,}5^2 = 2{,}25$
n) $(-0{,}5)^{-6} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6} = (-2)^6 = 64$
o) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$
p) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

7. **a)** $2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = 2$
b) $5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$
c) $6^1 = 6$
d) $4^{-\frac{3}{15}+\frac{5}{15}} = 4^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{42} = \sqrt[15]{16}$
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{6}-\frac{4}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{7}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2 \cdot \sqrt[6]{2}$
f) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{4}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

8. Nach der Schätzung sind es $(1 \cdot 10^{11}) \cdot (2 \cdot 10^{11}) = 2 \cdot 10^{22}$ Sterne.

34

9. **a)** x^5
b) a; $a \neq 0$
c) z^{-7}; $z \neq 0$
d) y^{-3}; $y \neq 0$
e) a^8
f) b^{-6}; $b \neq 0$
g) $30\,a^6$
h) $u^{-1} \cdot v$; $u, v \neq 0$
i) $120\,z^{-1}\,y^2$; $z, y \neq 0$
j) $x^{\frac{5}{6}}$; $x > 0$
k) $z^{\frac{2}{3}}$; $z > 0$
l) $a^{\frac{1}{3}}$; $a > 0$

10. **a)** $(x + y)^5$
b) $(x - y)^{-10}$
c) $(2\,p)^{-2}$
d) $(x \cdot y)^4$
e) $u + v$
f) $(2\,a + b)^4$

11. **a)** x^{3n+2m}; $x > 0$
b) p^{6a}; $p > 0$
c) a^p; $a > 0$
d) y^{6r}; $y > 0$
e) z^{6k}; $z > 0$

12. $6\,l = 6\,dm^3 = 6 \cdot 106\,mm^3$
$6 \cdot 10^6 \cdot 5{,}5 \cdot 10^6 = 33 \cdot 10^{12} = 3{,}3 \cdot 10^{13}$ Blutkörperchen

13. **a)** $100^3 = 1\,000\,000$
b) $10^{-6} = 0{,}000001$
c) $10^{-4} = 0{,}0001$
d) $(-2)^8 = 256$
e) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$
f) $256^{\frac{1}{2}} = \sqrt{256} = 16$
g) $36^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{36^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$
h) $81^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 33 = 27$

14. **a)** Falsch, richtig wäre: $2^3 + 4^3 = 8 + 64 = 72$
b) Falsch, richtig wäre: $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$ oder $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
c) Richtig

34

14. d) Falsch, richtig wäre: $4^3 - 4^{-2} = 64 - \frac{1}{16} = 63\frac{15}{16}$ oder $4^3 \cdot 4^{-2} = 4^1$
e) Falsch, richtig wäre: $(2+4)^3 = 6^3$
f) Falsch, richtig wäre: $(3-1)^2 = 2^2 = 4$

15. a) $(a \cdot b)^3$
b) $(c \cdot d)^{-2};\ c, d \neq 0$
c) $(a \cdot b)^0 = 1$
e) $\left(a \cdot \frac{1}{a}\right)^4 = 1^4 = 1;\ a \neq 0$
d) $(r \cdot s \cdot t)^{-4};\ r, s, t \neq 0$
f) $\left(z \cdot \frac{2}{z}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4};\ z > 0$

16. a) 10^n
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$
c) 20^{m+1}
d) 6^{z-1}
e) 10^{2n+1}
f) $(a \cdot b)^{3n}$
g) $6^{u+\frac{2}{3}}$
h) $8^{r-0{,}5}$

35

17. $a^5 \cdot b^5 = (a \cdot b)^5$ $\quad b^3 \cdot b^5 = b^8$ $\quad a^{-4} \cdot b^5$
$a^5 \cdot a^3 = a^8$ $\quad b^3 \cdot a^3 = (b \cdot a)^3$ $\quad a^{-4} \cdot a^3 = a^{-1}$
$a^5 \cdot b^{-4}$ $\quad b^3 \cdot b^{-4} = b^{-1}$ $\quad a^{-4} \cdot b^{-4} = (a \cdot b)^{-4}$

18. a) $3^{-3} = \frac{1}{27}$
b) $10^5 = 100\,000$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$
e) $\left(-\frac{9}{4}\right)^{-5} = \left(-\frac{4}{9}\right)^5 = -\frac{4^5}{9^5} = -\frac{1\,024}{59\,049}$
f) $\left(\frac{3}{8}\right)^7 = \frac{3^7}{8^7} = \frac{2\,187}{2\,097\,152}$

19. a) $2^6 = 64$
b) $2^{12} = 4\,096$
c) $2^8 = 256$
d) $(-3)^4 = 81$
e) $(-9)^2 = 81$
f) $-3^4 = -81$
g) $2^{12} = 4\,096$
h) $-2^{10} = -1\,024$
i) -2^{-10}
j) $(-1)^7 = -1$
k) $-1^{35} = -1$
l) $(-1)^{35} = -1$

20. a) $5^2 = 25$
b) $36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$
c) $49^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{49^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}$
d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$
e) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{16}{81}}$

21. a) x^{12}
b) $a^{-6};\ a \neq 0$
c) $z^{21};\ z \neq 0$
d) $w^{10};\ w \neq 0$
e) $(-x)^{12} = x^{12}$
f) $(-x)^{12} = x^{12}$
g) $-x^{12}$
h) $x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x^5};\ x > 0$
i) $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x};\ x > 0$
j) $y^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{y^9};\ y > 0$
k) $a^4;\ a > 0$
l) $b^{-1} = \frac{1}{b};\ b > 0$
m) $d^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{d};\ d > 0$
n) $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e};\ e > 0$
o) $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}};\ a > 0$

22. a) $2^{12} = 4\,096$
b) $-2^{10} = -1\,024$
c) $-2^{10} = -1\,024$
d) $-1^{35} = -1$
e) $-1^{35} = -1$
f) $(-1)^{35} = -1$
g) $2^8 = 256$
h) $(-1)^{-80} = 1$
i) $(-1)^{-24} = 1$
j) $(-1)^6 = 1$

35

23. (1) Falsch, Gegenbeispiel $2^1 \neq 1^2$
(2) Richtig, denn $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m$
(3) Richtig, denn $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

24. a) $2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \approx 1\,000 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 = 1\,000\,000\,000$
b) $2^{10} \cdot 2 \approx 1\,000 \cdot 2 = 2\,000$
c) $2^{10} \cdot 2^9 \approx 1\,000 \cdot 512 = 512\,000$
d) $2^{10} \cdot 2^4 \approx 1\,000 \cdot 16 = 16\,000$
e) $5^4 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \approx 625 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 = 625\,000\,000$

25. a) $3^4 \cdot (\sqrt{5})^4 = 3^4 \cdot 5^2$
b) $(\sqrt{3})^4 \cdot (\sqrt{5})^4 = 3^2 \cdot 5^2$
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot (\sqrt{3})^{-2}$
d) $x^{-2} \cdot y^{-2}$
e) $3^4 \cdot x^4$
f) $6^3 \cdot x^3 \cdot (\sqrt{2})^3 = 6^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x^3$
g) $(-4)^{-2} \cdot (\sqrt{2})^{-2} = (-4)^{-2} \cdot 2^{-1}$
h) $(\sqrt{6})^{-2} \cdot (\sqrt{8})^{-2} = 6^{-1} \cdot 8^{-1}$
i) $a^{-2} \cdot (\sqrt{2})^{-2} = a^{-2} \cdot 2^{-1}$
j) $x^4 \cdot y^4 \cdot (\sqrt{2})^4 = x^4 \cdot y^4 \cdot 2^2$
k) $e^4 \cdot (\sqrt{5})^4 = e^4 \cdot 5^2$
l) $y^3 \cdot (\sqrt{3})^3 = y^3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$

36

26. a) $2^2 = 4$
b) $5^4 = 625$
c) $7^5 = 16\,807$
d) $10^6 = 1\,000\,000$
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$
f) $3^3 = 27$
g) $-5^4 = -625$
h) $-3^2 = -9$

27. a) $3^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 3^2 = 9$
b) $4^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = 4^{\sqrt{16}} = 4^4 = 256$
c) $7^{-\sqrt{7}} = \frac{1}{7^{-\sqrt{7}}} \approx 0{,}0058$
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot \sqrt{2}} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\sqrt{2}} \approx \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4^{\sqrt{2}}} \approx 0{,}1408$

28. a) 6^{10}
b) 5^{10}
c) 10^{12}
d) 10^{16}
e) 2^{16}
f) 3^{12}
g) 2^{30}
h) 2^{50}

29. a) $3x^2 + 3x^3 = 3x^2(1 + x)$
b) $6z^4 - 4z^7 = 2z^4(3 - 2z^3)$
c) $2u^m$
d) $c^2(2 + 3c + 4c^2)$

30. a) $x^{10} - x^9$
b) $a^8 - a^6 - a^4$
c) $x^2 - x^3$
d) $a^2 - a^{-6} - a^{-2}$
e) $5a^9b^2v^{-2} - 10a^3b^7v^{-2}$
f) $5x^3y^3 - 5x^4y^2$

31. a) $12r^7 + 20r^3t^6 - 21s^3r^4 - 35s^3t^6 + 3tr^4 + 5t^7$
b) $2a + 2a^{-1}b^4 + 3b^{-4}a^2 + 3$
c) $5 - 5x^{-4}y^2 - 3y^{-3}x^4 + 3y^{-1}$
d) $9a^{-1} - 9a^2b^2 + 2b^{-5}a^{-3} - 2b^{-3}$
e) $u^{-5} - 2u^{-4} - 2u + 1$
f) $6e - e^{-1} + 1$

36

32. **a)** $a \cdot (a^2 + a^3 + 1)$ **c)** $4x^3 \cdot (x - 3)$ **e)** $ab \cdot (ab^2 + b - a^4)$
b) $x \cdot (x^4 - x + 1)$ **d)** $3y^2 \cdot (5y^3 - 14)$

33. **a)** Falsch, richtig wäre: $p^4 + p^7 + p^2 = p^2(p^2 + p^5 + 1)$
b) Falsch, richtig wäre: $2x^4 + 6x^6 = 2x^2(x^2 + 3x^4)$ oder: $2x^4 + 6x^6 = 2x^4(1 + 3x^2)$
c) Falsch, richtig wäre: $4x^2y^3 + 2x^3y^2 = 2x^2y^2(2y + x)$
d) Falsch, richtig wäre: $8a^2b^3 - 4a^3b^3 = 4a^2b^2(2b - ab)$

34. –

35. **a)** $b^{-0{,}5} = \frac{1}{\sqrt{b}}$ **g)** $6x^0 = 6$ **m)** $x^{12} - x^{12} = 0$
b) $(-1)^6 = 1$ **h)** b^{-2} **n)** $81x^4 - 27x^4 = 54x^4$
c) $(-1)^3 = -1$ **i)** $\frac{a^{-2}}{2}$ **o)** $a^{-6} - a^{-6} = 0$
d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2$ **j)** 1 **p)** $a^4 \cdot 4 - 8a^4 = -4a^4$
e) z^{10} **k)** $-x^{12}$
f) $(-x)^{12}$ **l)** x^{12}

36. **a)** x^{-n} **c)** $a^{-n \cdot m - m}$ **e)** x
b) x^{m-n} **d)** $x^{n \cdot k}$ **f)** y^{-3n}

37

37. **a)** $a^6 \cdot b^{10}$ **d)** $x^{12} \cdot y^{-8} \cdot z^4$ **g)** $x^{5n+5} \cdot y^{2n+2}$
b) $x^{-12} \cdot z^{18}$ **e)** $a^{2n} \cdot b^{4n}$ **h)** $x^{8n-12} \cdot y^{-4n+6}$
c) $r^9 \cdot s^{27}$ **f)** $a^{3n} \cdot b^{4n} \cdot c^{2n}$

38. **a)** $(x + y)^5$ **c)** $a^6 \cdot b^{10}$ **e)** $(2p)^{-2}$
b) $(a - b)^{-10}$ **d)** $x^{-15} \cdot y^{10}$ **f)** $(x \cdot y)^4$

39. **a)** $5^{\frac{5}{6}}$ **b)** $7^{\frac{8}{15}}$ **c)** $x^{\frac{5}{6}};\ x > 0$ **d)** $2^{-\frac{5}{6}}$ **e)** $x^{\frac{11}{15}};\ x > 0$

40. $a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}} = (a \cdot b)^{\frac{3}{4}}$ $b^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}} = b$ $a^{-\frac{1}{5}} \cdot b^{\frac{3}{4}}$
$a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}} = (a^3 \cdot b)^{\frac{1}{4}}$ $b^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}} = b^{\frac{1}{2}}$ $a^{-\frac{1}{5}} \cdot b^{\frac{1}{4}}$
$a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{5}}\, b^{\frac{1}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{5}} = b^{\frac{1}{20}}$ $a^{-\frac{1}{5}} \cdot b^{-\frac{1}{5}} = (a \cdot b)^{-\frac{1}{5}}$

41. **a)** $y^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{y^5};\ y > 0$ **c)** $b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{b^2};\ b > 0$ **e)** $d^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{d^5};\ d > 0$ **g)** $c^{\frac{1}{2}} = \sqrt{c};\ c > 0$
b) $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a};\ a > 0$ **d)** $c^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{c}};\ c > 0$ **f)** $b^0 = 1;\ b > 0$ **h)** $a^3;\ a > 0$

42. **a)** $a^{0{,}72} = a^{\frac{18}{25}} = \sqrt[25]{a^{18}};\ a > 0$ **d)** $x^1 = x;\ x > 0$
b) $b^{-2} = \frac{1}{b^2};\ b > 0$ **e)** $a^1 = a;\ a > 0$
c) $r^{2{,}1} \cdot s^{-3{,}5} = r^{\frac{21}{10}} \cdot s^{-\frac{7}{2}} = \sqrt[10]{r^{21}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2]{s^7}};\ r, s > 0$

37

43. **a)** $3^{\frac{m+n}{m\cdot n}}$ **c)** $80 = 1$ **e)** $p^{\frac{2m}{n}}$

b) $2^{\frac{2n-1}{n^2-n}}$ **d)** $7^{\frac{m}{n-1}} \cdot 7^{\frac{m}{n+1}} = 7^{\frac{2mn}{n^2-1}}$

44. **a)** Hier wurden die Exponenten multipliziert, statt addiert.
$y^{\frac{2}{3}+3} = a^{\frac{11}{3}} = \sqrt[3]{a^{11}}$ (P1); $a > 0$

b) Hier wurden die Exponenten falsch addiert:
$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \neq \frac{2+2}{3+3} = \frac{4}{6}$, richtig ist $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}$.
$y^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = y^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{y^4}$ (P1*); $y > 0$

c) Hier wurde der Exponent quadriert, statt mit dem anderen multipliziert.
$c^{\frac{5}{3}\cdot 2} = c^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{c^{10}}$ (P3); $c > 0$

d) Hier wurde (P1) angewendet, obwohl es eine Summe von Potenzen ist. Es kann kein Potenzgesetz angewandt werden, um die Summanden zusammenzufassen.

45. $\sqrt{a}$ muss im linken Mauerstein in der zweiten Zeile von unten stehen.
In der Mauer zu Teilaufgabe b) muss $\sqrt{y}$ einen Mauerstein nach links.

a)

a^3			
a^2	a		
$\sqrt{a}$	$a^{\frac{3}{2}}$	$a^{-\frac{1}{2}}$	
$a^{\frac{1}{2}}$	1	$a^{\frac{3}{2}}$	a^{-2}

b)

$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}$			
$\sqrt{y}$	$y^{\frac{2}{3}}$		
$x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}$	$(xy)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$	
$x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}$	$y^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{x}$	$y^{-\frac{1}{3}}$

c)

$c^{m+\frac{1}{3}}$			
$c^{-\frac{n}{2}}$	$c^{m+\frac{n}{2}+\frac{1}{3}}$		
c^{-m-n}	$c^{m+\frac{n}{2}}$	$\sqrt[3]{c}$	
c^{-2m-n}	c^m	$\left(\sqrt{c}\right)^n$	$\frac{\sqrt[3]{c}}{\left(\sqrt{c}\right)^n}$

37 *Das kann ich noch!*

A) Falls es einen rechten Winkel gibt, so liegt er immer der längsten Seite gegenüber. Wir prüfen mit dem Kehrsatz des Satzes des Pythagoras, ob der Winkel ein rechter ist.

1) $(4{,}5\,\text{cm})^2 = 20{,}25\,\text{cm}^2$ und $(3\,\text{cm})^2 + (2\,\text{cm})^2 = 13\,\text{cm}^2$, also $c^2 > a^2 + b^2$, das Dreieck hat beim Eckpunkt C einen stumpfen Winkel.

2) $(6\,\text{cm})^2 = 36\,\text{cm}^2$ und $(3\,\text{cm})^2 + (4\,\text{cm})^2 = 25\,\text{cm}^2$, also $c^2 > a^2 + b^2$, das Dreieck hat beim Eckpunkt C einen stumpfen Winkel.

3) $(9\,\text{cm})^2 = 81\,\text{cm}^2$ und $(8\,\text{cm})^2 + (6\,\text{cm})^2 = 100\,\text{cm}^2$, also $c^2 < a^2 + b^2$, das Dreieck ist ein spitzwinkliges Dreieck.

4) $(7{,}5\,\text{cm})^2 = 56{,}25\,\text{cm}^2$ und $(6\,\text{cm})^2 + (4{,}5\,\text{cm})^2 = 56{,}25\,\text{cm}^2$, also $a^2 = b^2 + c^2$, das Dreieck hat beim Eckpunkt A einen rechten Winkel.

1.4.2 Dividieren von Potenzen

39

1. **a)** $7^1 = 7$ **e)** $0{,}5^2 = 0{,}25$ **i)** $(-3)^2 = 9$
b) $5^{-2} = \frac{1}{25}$ **f)** $1{,}2^{-1} = \frac{1}{1{,}2}$ **j)** $(-5)^2 = 25$
c) $2^1 = 2$ **g)** $7^3 = 343$ **k)** $10^0 = 1$
d) $10^1 = 10$ **h)** $2^{-6} = \frac{1}{64}$ **l)** $5^2 = 25$

2. **a)** $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$ **c)** $6^{-1} = \frac{1}{6}$ **e)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{11}{30}} = \sqrt[30]{\left(\frac{3}{4}\right)^{11}}$
b) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$ **d)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ **f)** $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{19}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{6^{19}}}$

3. $\frac{2^{22}}{2^1} = 2^{22-1} = 2^{21}$

4. **a)** 2^5 **e)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^4$ **i)** 4^6 **m)** $\left(-\frac{1}{36}\right)^{-4} = (-36)^4$
b) 5^4 **f)** $4^{-4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$ **j)** $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ **n)** $\left(\frac{9}{16}\right)^{-3} = \left(\frac{16}{9}\right)^3$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = 2^{10}$ **g)** $3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$ **k)** $(-1)^{20} = 1$ **o)** $2^{\sqrt{3}}$
d) 2^5 **h)** 2^9 **l)** 3^{-3}

5. **a)** $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$ **d)** $8^1 = 8$
b) $16^{\frac{1}{4}} = 2$ **e)** $\left(\frac{1}{9}\right)^{1{,}5} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{9^3}\right)} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$
c) $64^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{64}} = \frac{1}{2}$ **f)** $4^{-0{,}5} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

6. **a)** $a^6;\ a \neq 0$ **e)** $y^{-3};\ y \neq 0$ **i)** $(a \cdot b)^2;\ a,\ b \neq 0$
b) $x^{-9};\ x \neq 0$ **f)** $z^{-2};\ z \neq 0$ **j)** $\left(\sqrt{2}\right)^{-4} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
c) $\left(\sqrt{a}\right)^3 = a^{\frac{3}{2}};\ a \geq 0$ **g)** $b^{-2};\ b \neq 0$ **k)** $(x+y)^{-5};\ x + y \neq 0$
d) $c^2;\ c \neq 0$ **h)** $\left(\sqrt{b}\right)^5 = b^{\frac{5}{2}};\ a \neq 0,\ b \geq 0$ **l)** $\left(x + \sqrt{5}\right)^8;\ x \neq -\sqrt{5}$

1.4.3 Vermischte Übungen zu den Potenzgesetzen – Wurzelgesetze

40

1. a) (P2):

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

(P2*):

$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(P3):

$(a^r)s = ar \cdot s$

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

b) **(1)** $\sqrt[3]{8} = 2$ **(2)** $\sqrt[5]{32} = 2$ **(3)** $\sqrt[12]{2^{12}} = 2$

2. a) u^{-1} **b)** r^6 **c)** $(v \cdot w)^3$ **d)** x^2 **e)** $\left(\frac{r}{s}\right)^{-3}$ **f)** $x^1 = x$ **g)** $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{-2}$ **h)** $(u - u - 1)^2$ **i)** c^{-6n} **j)** z^{3n} **k)** w^{2n-1} **l)** $(a \cdot b)^{2n-1}$

3. a) $\left(\frac{u}{v}\right)^4$; $v \neq 0$ **b)** $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$; $x, y \neq 0$ **c)** $\left(\frac{p}{q}\right)^3$; $q \neq 0$ **d)** $\left(\frac{w}{a}\right)^{-4}$; $w, a \neq 0$ **e)** $\left(\frac{a+b}{c}\right)^2$; $c \neq 0$ **f)** $\left(\frac{u-1}{v}\right)^{-2}$; $u \neq 1, v \neq 0$

4. a) a^8; $a \neq 0$ **b)** b^{-8}; $b \neq 0$ **c)** $\left(\frac{c}{d}\right)^{-5}$; $c, d \neq 0$ **d)** x^{-4}; $x \neq 0$ **e)** y^3; $y \neq 0$ **f)** $\left(\frac{a}{u}\right)^5$; $u \neq 0$
g) a^{-2}; $a \neq 0$ **h)** 1; $x \neq 0$ **i)** 1; $a \neq 0$ **j)** 1; $a \neq 0$ **k)** $\left(\frac{z}{y}\right)^{-3}$; $z, y \neq 0$ **l)** $\left(\frac{x}{z}\right)^5$; $z \neq 0$
m) 1; $b \neq 0$ **n)** y^{-n}; $y \neq 0$ **o)** z^n; $a \neq 0$ **p)** $\left(\frac{u}{x}\right)^m$; $x \neq 0$ **q)** $a^1 = a$ **r)** x^{-n}

5.
$\frac{a^5}{b^5} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$ $\quad \frac{b^4}{b^5} = b^{-1}$ $\quad \frac{a^{-3}}{b^5} = a^{-3} b^{-5}$

$\frac{a^5}{a^4} = a$ $\quad \frac{b^4}{a^4} = \left(\frac{b}{a}\right)^4$ $\quad \frac{a^{-3}}{a^4} = a^{-7}$

$\frac{a^5}{b^{-3}} = a^5 b^3$ $\quad \frac{b^4}{b^{-3}} = b^7$ $\quad \frac{a^{-3}}{b^{-3}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$

6. a) $\frac{(\sqrt{5})^3}{3^3} = (\sqrt{5})^3 \cdot 3^{-3} = (\sqrt{5})^2 \cdot \sqrt{5} \cdot 3^{-3} = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot 3^{-3} = \frac{5}{27}\sqrt{5}$

b) $\frac{(\sqrt{3})^5}{(-2)^5} = (\sqrt{3})^5 \cdot (-2)^{-5} = (\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{3} \cdot (-2)^{-5} = 9 \cdot \sqrt{3} \cdot (-2)^{-5} = -\frac{9}{32}\sqrt{3}$

c) $\frac{(-4)^{-2}}{(\sqrt{2})^{-2}} = (-4)^{-2} \cdot (\sqrt{2})^2 = 16^{-1} \cdot 2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

d) $\frac{(\sqrt{3})^4}{(\sqrt{5})^4} = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

e) $\frac{(x \cdot \sqrt{2})^2}{(y \cdot \sqrt{3})^2} = \frac{x^2 \cdot (\sqrt{2})^2}{y^2 \cdot (\sqrt{3})^2} = \frac{2x^2}{3y^2}$

40 **6. f)** $\dfrac{(x\cdot\sqrt{2})^{-4}}{(y\cdot\sqrt{5})^{-4}} = (x\cdot\sqrt{2})^{-4}\cdot(y\cdot\sqrt{5})^{4} = x^{-4}\cdot(\sqrt{2})^{-4}\cdot y^{4}\cdot(\sqrt{5})^{4} = x^{-4}\cdot 2^{-2}\cdot y^{4}\cdot 5^{2}$

$= \left(\dfrac{5}{2}\right)^{2} x^{-4} y^{4} = \dfrac{25\,y^{2}}{4\,x^{2}}$

7. (1) Die Potenzgesetze können nicht angewendet werden.
$(3+4)^2 = 7^2 = 49$
(2) Verrechnet. $9\cdot 16 = 144$
(3) Die Potenzgesetze können nicht angewendet werden.
$(3-4)^2 = (-1)^2 = 1$
(4) Richtig.

41 **8. a)**

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">216</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">$12\,a$</td><td colspan="2">$18\,a^{-1}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$2\,a$</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">$3\,a^{-1}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">a^{2}</td><td colspan="2">$2\,a^{-1}$</td><td colspan="2">$3\,a$</td><td colspan="2">a^{-2}</td></tr>
</table>

b)

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">$8\,x^{-9}y^{-2}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">$4\,x^{-5}y^{-2}$</td><td colspan="2">$2\,x^{-4}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$4\,x^{-1}y^{-1}$</td><td colspan="2">$x^{-4}y^{-1}$</td><td colspan="2">$2\,y$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$4\,x\,y$</td><td colspan="2">$x^{-2}y^{-2}$</td><td colspan="2">$x^{-2}y$</td><td colspan="2">$2\,x^{2}$</td></tr>
</table>

9. $9^{\frac{1}{6}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = 3^{2\cdot\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}}$

$125^{\frac{1}{12}} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 5^{3\cdot\frac{1}{12}} = 5^{\frac{1}{4}}$

$32^{\frac{3}{10}} = (2^5)^{\frac{3}{10}} = 2^{5\cdot\frac{3}{10}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^1 + \frac{1}{2} = 2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\sqrt{2}$

$\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}}\cdot(3^2) - \frac{1}{6} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}-1} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{-1} = \dfrac{3^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{2}}{3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. a) $(a\cdot b)^4$
b) $x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{4}} = (x\cdot y)^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{4}} = \sqrt{x\cdot y}\cdot\sqrt[4]{y}$
c) $(4\cdot 9)^2 = 36^2 = 1\,296$
d) $(a\cdot b)^7$
e) $(a\cdot b)^{24}$
f) $(\sqrt{2}\cdot a)^2 = 2\,a^2$
g) $a^{-40}\cdot b^{40}\cdot c^{-40} = (a^{-1}\cdot b\cdot c^{-1})^{40}$
h) $(x\cdot y^2\cdot z)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\cdot y\cdot z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\cdot y\cdot\sqrt{z}$

11. a) $x^2 y^{-3}$
b) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3}$
c) $a^{12}\cdot b^{15}$
d) $x^{16}\cdot y^{-14} = \dfrac{x^{16}}{y^{14}}$
e) $a^{-\frac{2}{n}}\cdot b^2\cdot c$

41 **12.** $V_{klein} = a^3$; $A_{groß} = 4\,a^2$; $h = a^3 : 4\,a^2 = \frac{1}{4}\,a$

13. $1\text{ g} : (4 \cdot 10^{-22}\text{ g}) = 2{,}5 \cdot 10^{21}$
1 g Uran enthält $2{,}5 \cdot 10^{24}$ Atome.
Für den Überschlag nehmen wir an, dass ein Uranatom die Form eines Würfels hat.
$10^{-10}\text{ m} = 10^{-8}\text{ cm}$
Ein Würfel mit 1 cm Kantenlänge enthält also $(10^8)^3 = 10^{24}$ Uranatome.
Er wiegt dann $10^{24} \cdot 4 \cdot 10^{-22}\text{ g} = 400\text{ g}$.
So ein Würfel wäre ungefähr 400 g schwer.

14. Die Potenzgesetze kann man immer anwenden, während die Wurzelgesetze nur für die Spezialfälle sinnvoll angewendet werden können.

15.
a) $\sqrt{81} = 9$ **c)** $\sqrt[3]{125} = 5$ **e)** $\sqrt[5]{32} = 2$
b) $\sqrt[3]{8} = 2$ **d)** $\sqrt[4]{81} = 3$ **f)** $\sqrt[3]{27} = 3$

16.
a) $2^{-\frac{1}{6}}$ **c)** $2^{-\frac{1}{8}}$ **e)** $z^{\frac{1}{4}}$; $z > 0$
b) 1 **d)** $b^{\frac{1}{6}}$; $b > 0$ **f)** $a^{\frac{1}{6}}$; $a > 0$

17.
a) $\sqrt{9} = 3$ **c)** $\sqrt[3]{27} = 3$ **e)** $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$
b) $\sqrt{9} = 3$ **d)** $\sqrt[3]{125} = 5$ **f)** $\frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

18.
a) $\sqrt{4} = 2$ **c)** $\sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}$ **e)** $\sqrt[4]{4} = \sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$
b) $\sqrt[3]{\sqrt{144}} = \sqrt[3]{12}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{49}} = \sqrt[3]{7}$

Im Blickpunkt: Stimmung einer Tonleiter

42 **1.** **a)** $c \xrightarrow{\cdot\frac{9}{8}} d \xrightarrow{\cdot\frac{9}{8}} e \xrightarrow{\cdot\frac{256}{243}} f \xrightarrow{\cdot\frac{9}{8}} g \xrightarrow{\cdot\frac{9}{8}} a \xrightarrow{\cdot\frac{9}{8}} h \xrightarrow{\cdot\frac{256}{243}} c'$

Bei einem Ganztonschritt wird die Frequenz mit $\frac{9}{8}$ vervielfacht, bei einem Halbtonschritt mit $\frac{256}{243}$.

b) Für die nicht in der Tonleiter enthaltenen Halbtonschritte müsste gelten

$\xrightarrow{\qquad\cdot\frac{9}{8}\qquad}$ über $\xrightarrow[\cdot h]{}\xrightarrow[\cdot h]{}$, also $h^2 = \frac{9}{8}$, also $h = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \neq \frac{256}{243}$.

Näherungswerte sind $\frac{256}{243} = 1{,}054\ldots$ und $\frac{3}{2\sqrt{2}} = 1{,}060\ldots$

42

2. a) $h^{12} = 2$, also $h \sqrt[12]{2} = 1{,}059\ldots$

b)

Ton	c	d	e	f	g	a	b	c′
ν_{Pyth} (in Hz)	260,7	293,3	330	347,7	391,1	440	495	521,5
ν_{Wohl} (in Hz)	261,6	293,7	329,6	349,2	392,0	440	493,9	523,3

3. Die reine Stimmung hat ausgehend von der Frequenz ν des Grundtones c folgende Frequenzen.

Ton	c	d	e	f	g	a	b	c′
Frequenz	ν	$\frac{9}{8}\nu$	$\frac{5}{4}\nu$	$\frac{4}{3}\nu$	$\frac{3}{2}\nu$	$\frac{5}{3}\nu$	$\frac{15}{8}\nu$	2ν